**ІSSN XXXX-XXXX**

**ЧОРНОМОРСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ**

**УНІВЕРСИТЕТ**

**імені ПЕТРА МОГИЛИ**

****

**Кулаковська І.В.**

Випуск № &&&

**МЕТОДИЧНА СЕРІЯ**

**Математична**

**логіка**

**Методичні вказівки**

**до виконання лабораторних занять**

**Миколаїв**

**2018**

Міністерство освіти і науки україни

Чорноморський національний університет

імені Петра Могили

Факультет компьютерних наук

Кафедра інтелектуальних інформаційних систем

**І.В.Кулаковська**

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА

*Методичні рекомендіції до виконання лабораторних робіт*

**Випуск № &&&**

Миколаїв 2018

УДК 510.6

ББК 22.18

К73

|  |  |
| --- | --- |
|  | *Рекомендовано до друку методичною радою факультета компьютерних наук Чорноморського національного університету імені Петра Могили (протокол №\_\_\_\_\_(\_\_\_\_\_) від 20.12.2013р.)* |
|  | **Рецензент:**  *Фісун М.Т.,* д.т.н., професор, завідувач кафедри Інженерії програмного забезпечення ЧНУ імені Петра Могили. |
| **К73** | **Кулаковська І.В.** Математична логіка. Методичні рекомендіції до виконання лаборато-рних робіт. Випуск № 417. ­ Миколаїв: Видав-ництво ЧНУ імені Петра Могили, 2018. ­ 105 с. |
|  | Методичні рекомендіції до виконання лабораторних робіт призначені для студентів спеціальності 124 «Системний аналіз» та 122 «Компьютерні науки», які вивчають курс «Математична логіка» на факультеті компьютерних наук Чорноморського національного університету імені Петра Могили. |

УДК 510.6

ББК 22.18

©Кулаковська І.В.

**©** ЧНУ імені Петра Могили, 2018

**Лабораторні заняття з дисципліни**

**«Математична логіка»**

**ЗМІСТ**

Contents

[**ВСТУП** 6](#_Toc511378945)

[**Лабораторна робота1.** 7](#_Toc511378946)

[Тема: Висловлення. Логічні операції. Пропозиційні формули. 7](#_Toc511378947)

[Задачі для самостійного розв’язування 15](#_Toc511378948)

[**Лабораторна робота2.** 18](#_Toc511378949)

[Тема: Рівносильність формул. Спрощення систем висловлень. 18](#_Toc511378950)

[Задачі для самостійного розв’язування 26](#_Toc511378951)

[**Лабораторна робота3.** 29](#_Toc511378952)

[Тема: Відшукання нормальних форм. 29](#_Toc511378953)

[Задачі для самостійного розв’язування 38](#_Toc511378954)

[**Лабораторна робота 5.** 41](#_Toc511378955)

[Тема: Булеві функції. Застосування булевих функцій до аналізу і синтезу релейно-контактних схем. 41](#_Toc511378956)

[Задачі для самостійного розв’язування 48](#_Toc511378957)

[**Лабораторна робота 6.** 54](#_Toc511378958)

[Тема: Мінімізація булевих функцій. Карти Карно.Метод Квайна. 54](#_Toc511378959)

[Задачі для самостійного розв’язування лабор 6 59](#_Toc511378960)

[**Контрольна робота.** 61](#_Toc511378961)

[Методичні вказівки до виконання контрольної роботи 62](#_Toc511378962)

[**Використана література** 65](#_Toc511378963)

# **ВСТУП**

Курс “Математична логіка ” призначений сформувати у студентів знання, вміння і навички, необхідні для усвідомлення і раціонального використання понять, законів і методів математичної логіки, як предмету вивчення, і як засобу для вивчення інших предметних областей.

Математична логіка, будучи частиною математики, займає в ній особливе місце як важливий і могутній інструмент дослідження основ математики, обґрунтування самої математичної науки.

Курс математичної логіки має своєю метою навчити студентів основним поняттям і методам цієї науки, а саме познайомити з:

* формалізацією математичної мови, яка в цьому курсі йде значно дальше, ніж в курсах алгебри, геометрії та математичного аналізу;
* формалізованим аксіоматичним методам побудови математичних теорій, які охоплюють також і логічні засоби;
* його основними складовими частинами: мовою, аксіомами, правилами виводу;
* проблемами несуперечності, повноти, недовідності теорій.

Такий підхід при вивченні математичних теорій характерний для сучасної математики і знаходить більше поширення в інших областях знань.

Завданнями математичної логіки виступають:

* + освоєння предметних мов логіки висловлень і логіки предикатів;
  + придбання навичок використання дедуктивних методів виводу наслідків з посилок;
  + уміння працювати з різними моделями формального уточнення поняття “алгоритм”.

Курс математичної логіки традиційно складається з трьох частин – логіки висловлень (алгебра і числення висловлень), логіки предикатів (алгебри та числення предикатів) та проблем мінімізації булевих функцій (поліноми Жегалкіна, карти Карно).

На практичних заняттях студенти вправляються на прикладах і розв‘язують задачі з розділів “Логіка висловлень” і “Логіка предикатів”. Вони повинні оволодіти технікою логічних перетворень, особливо при роботі з кванторами, навчитися формально доводити формули числення висловлень.

Чотирнадцять занять посібника містять необхідний мінімум теоретичних відомостей, приклади рішення задач з детальними коментарями до них, вправи та завдання для самостійної роботи.

# **Лабораторна робота1.**

Тема: Висловлення. Логічні операції. Пропозиційні формули.

**Мета:** Засвоїти поняття висловлення – основного об‘єкта дослідження алгебри висловлень. Познайомитися з основними операціями над висловленнями. Сформувати навички і вміння використання логічних операцій для побудови нових висловлень з наявних. Сформувати поняття формули алгебри висловлень. Навчити визначати тип формули і її логічне значення. Закріпити навички та вміння визначати тип формули і її логічне значення. Познайомитися з основними тавтологіями (законами) алгебри висловлень

**План**

* **Висловлення.**
* **Логічні операції над висловленнями.**
* **Пропозиційні формули алгебри висловлень.**
* **Тотожно істинні формули алгебри висловлень.**
* **Основні тавтології алгебри висловлень.**

**Короткі теоретичні відомості**

Під *висловленням* розуміють оповідальне речення, про яке можна сказати одне із двох: істинне воно або хибне. Звичайно, це не означення. Поняття висловлення є в логіці висловлень вихідне, неозначуване.

Наприклад, «Земля — планета сонячної системи» (істинне висловлення), «Місяць - штучний супутник Землі» (хибне).

Кожне питальне і кожне окличне речення не є висловленням. Означення також не являється висловленнями.

Індивідуальні висловлення будемо позначати буквами *v, w, v1, w1,w2*,…

У випадку, коли деяке висловлення *υ* істинне, будемо говорити, що воно приймає *істинносне значення «істинна»,* і записувати (*υ*)=1. Якщо ж деяке висловлення *ω* хибне, будемо говорити, що воно приймає *істинносне значення «хибність*», і записувати (*ω*) = 0. Таким чином, істинна буде позначатися одиницею (1), а хибність - нулем (0). Наприклад, (32) = 1, (2 > 5) = 0, (22) = 0, (sin *х –* періодична функція) = 1. Часто замість 1 і 0 пишуть відповідно *і* та *х* або *t* і *f.*

*Значенням* висловлення будемо називати його істинносне значення і надалі ототожнювати висловлення з їхніми значеннями.

Над висловленнями визначають наступні *основні* *операції*, які дозволяють з певних вихідних висловлень утворювати нові висловлення:

*Запереченням* висловлення *υ* називається висловлення, яке позначається *υ* (або ), що істинне тоді і тільки тоді, коли *υ* хибне. Висловлення *υ*  читається «не *υ*». Висловлення «не *υ»;* «невірно, що *υ*»; « *υ* хибне» означають (передають) висловлення *υ.*

*Кон'юнкцією* висловлень *υ* і *ω* називається висловлення, яке позначається *υω*, що істинне тоді і тільки тоді, коли *υ* і *ω* істинні, тобто (*υ) =* 1 і (*ω)* = 1. Висловлення *υ**ω*  читається « *υ* і *ω* ». Висловлення « *υ* і *ω* »; «і *υ,* і *ω* »; «одночасно обидва висловлення *υ* і *ω* істинні» означають висловлення *υ**ω*.

*Диз'юнкцією* висловлень *υ* і *ω* називається висловлення, яке позначається *υ**ω,* що хибне тоді і тільки тоді, коли *υ* і *ω*  хибні, тобто (*υ)* = 0 і (*ω)* = 0. Висловлення *υ**ω*  читається « *υ* або *ω* ». Висловлення « *υ*  або *ω* »; «або *υ,* або *ω*»; «принаймні одне з висловлень *υ*  або *ω*  істинне» означають висловлення *υ**ω.*

*Імплікацією* висловлень *υ* і *ω* називається висловлення, що позначається *υ******ω*, хибне тоді і тільки тоді, коли *υ*  істинне, *ω*  хибне, тобто (*υ) =* 1, (*ω)* = 0. Висловлення *υ* **** *ω*  читається « з *υ* слідує  *ω* ». Висловлення *υ* **** *ω* означає те саме, що і висловлення: «якщо *υ* , то *ω*»; «з *υ*  випливає *ω*»; «з *υ* слідує *ω*»; «*υ*  тільки тоді, коли *ω*»; « *υ* тягне *ω*»; « *υ*  тільки в тому випадку, якщо *ω*»; « *υ* є достатньою умовою для *ω*»; « *ω*  за умови, що *υ*»; «*ω*, якщо *υ*»; «*ω* є необхідною умовою для *υ*»; «для того щоб *υ,* необхідно, щоб *ω*»; «для того, щоб  *ω,* досить, щоб *υ*»; «*ω* тоді, коли *υ*»; «коли *υ,* тоді  *ω*».

*Еквіваленцією* висловлень *υ* і *ω* називається висловлення, яке позначається *υ* **** *ω*, що істинне тоді і тільки тоді, коли значення висловлень *υ* і  *ω*  збігаються. Висловлення *υ* **** *ω* читається «*υ*  еквівалентно  *ω*». Висловлення «*υ*  тоді і тільки тоді, коли  *ω*»; «для того щоб *υ,* необхідно і достатньо, щоб  *ω*» означають висловлення *υ* **** *ω*.

Логічні значення результатів цих операцій пов’язані з логічними значеннями вихідних висловлень так, як вказано у наступній таблиці, що називається *істинносною* *таблицею* (*таблицею* *істинності*) (скорочено ТІ) відповідних операцій:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 0     0  0     1  1     0  1     1 | 1  1  0  0 | 0  0  0  1 | 0  1  1  1 | 1  1  0  1 | 1  0  0  1 |

*Пропозиційні змінні* (або просто *змінні*) – нескінченний список букв  за допомогою яких записують висловлення.

Поняття *пропозиційної формули (пф)* вводиться індуктивно.

1. Символи констант 0, 1 є пф.

2. Кожна змінна є пф.

3 – 7. Якщо *A* і *B* суть пф, то *¬ (A), (A) ∧ (B), (A) ∨ (B), (A) → (B), (A)↔(B)* - також пф.

П.п. 1 і 2 задають так звані вихідні пф, а п.п. 3 – 7 називаються *правилами* *утворення* *нових* *пф* з існуючих. Такі пф будемо називати пф у мові (або базисі) {¬, ∨, ∧, →, ↔, 0*,* 1}.

*Підформулою* формули називається всяка її частина, яка сама є формулою.

Дужки у визначенні пропозиційної формули потрібні для того, щоб можна було указати, як дана пропозиційна формула утворена з вихідних, і довести, що даний вираз є пропозиційною формулою.

Для скорочення запису введемо деякі угоди про опускання дужок. По-перше, будемо опускати дужки, що містять у собі змінні, а також 0 і 1. По-друге, будемо опускати й інші дужки, за умови, що їхнє відновлення відбувається в такий спосіб: завжди вибираємо послідовно із присутніх символів логічних операцій у першу чергу символ ↔*,*удругу - →, у третю - ∨, у четверту - ∧, у п'яту - ¬, причому обраному символу надається найбільша область дії, сумісна з вимогою, щоб увесь вираз був пропозиційною формулою. Інакше кажучи, символ ¬ зв'язує сильніше,ніж ∧, а символ ∧ -сильніше від ∨, і т.д.

Наприклад, відновлення дужок за зазначеною угодою в пропозиційній формулі  послідовно дає:

;

;

;

;

.

З висловлень шляхом з'єднання їх за допомогою логічних зв'язок (операцій) можна утворювати нові, так звані *складні висловлення*. Наприклад, «3 не більше 5»; «не вірно, що 2 < 0»; «або 3  1, або 4  3»; «sin *х =* 1 тільки тоді, коли *х = π*/2*»*; «sin *х* = 1 тоді, коли *х = π*/2*»;* «3 = 2 тоді і тільки тоді, коли 4  3» і т.д. Такі висловлення будуть *істинними* або *хибними* залежно від істинності або хибності індивідуальних висловлень, що входять до них, і інтерпритації логічних операцій.

Якщо *A*(*Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n) - будь-яка пф, *υ*1, *υ*2, ... , *υ*n - довільні висловлення, то, змінюючи в цій пф змінну *Xi* на *υ*i (*i* =*1, 2,* ..., *n*), 1 - на висловлення 2 = 2, 0 - на висловлення 2  2, якщо в ній зустрічаються константи 1 або 0, отримаємо висловлення *A*(*υ*1, *υ*2, ... , *υ*n)*.* Значенням пф *A*(*Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n) для даного набору (*υ*1, *υ*2, ... , *υ*n*)* значень змінних *Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n  відповідно, де *υ*i () є висловлення або 0, або 1, так як висловлення ми ототожнюємо з їхніми значеннями, назвемо *істинносним значення висловлення A(υ1, υ2, ... , υn)*. Значення пф для різних наборів значень її змінних зручно представляти у вигляді таблиці, яка називається *таблицею істинності* цієї пф (табл. 2). Якщо дана пф має *п* різних змінних, то можливо 2*n* різних наборів значень цих змінних і, отже, таблиця істинності для такої пф містить 2*n* рядків.

Т а б л и ц я 2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| p q r |  |  |  |
| 0 0 0  0 0 1  0 1 0  0 1 1  1 0 0  1 0 1  1 1 0  1 1 1 | *1* 0 1 1  *1* 0 0 0  *1* 1 1 1  *1* 0 0 0  *1* 0 1 1  *0* 0 0 0  *1* 1 1 1  *0* 0 0 0 | *0* 1 0 1 1 1 1  *0* 1 0 1 1 1 1  *0* 0 1 1 1 0 0  *0* 0 1 1 1 0 0  *0* 0 1 1 0 0 1  *0* 0 1 1 0 0 1  *0* 0 1 1 0 0 0  *0* 0 1 1 0 0 0 | 1 0 *1* 1 1 1  1 0 *1* 1 1 1  1 0 *1* 1 1 0  1 0 *1* 1 1 0  1 0 *1* 0 1 1  1 0 *1* 0 1 1  0 1 *1* 0 0 0  0 1 *1* 0 0 0 |

Пропозиційна формула *A*(*Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n) називається *виконуваною (спростовною),* якщо існує такий набір висловлень *υ*1, *υ*2, ... , *υ*n , який обертає цю пропозиційну формулу на істинне (хибне) висловлення *А*(*υ*1, *υ*2, ... , *υ*n).

Пропозиційна формула, значення якої для будь-якого набору значень змінних є 1 (відповідно 0), будемо називати *тотожно істинною* пропозиційною формулою або *тавтологією* (відповідно *тотожно хибною* пропозиційною формулою або *запереченням*).

**Тотожно істинні формули алгебри висловлень**

Пропозиційна формула, значення якої для будь-якого набору значень змінних є 1, будемо називати *тотожно істинною* пропозиційною формулою або *тавтологією*. Тавтології називають ще законами алгебри висловлень.

Перелічимо деякі *основні тавтології*. Будемо писати |= *A* для позначення того, що пропозиційна формула *А* є тавтологія.

(I)      |=        (закон виключеного третього)

(II)    |=  (закон подвійного заперечення)

(III)    |=   (IV)  |=   (закони ідемпотентності)

(V)     |=  (VI)    |=

(VII)   |=  (закони комутативності)

(VIII) |=

(IX)    |=  (закони асоціативності)

(X)     |=

(XI)    |=    (закони дистрибутивності)

(XII)   |=

(XIII)  |=   (закони де Моргана)

(XIV)  |= 

(XV)   |= (закон контрапозиції)

(XVI)  |= (закон транзитивності імплікації)

(XVII) |=  (закон непрямого доказу)

(XVIII)|= (закон розбору випадків)

(XIX)  |= (закон транзитивності еквіваленції)

(XX)    |= (закон протилежності)

(XXI)   |=, |=   (вираження 1 через ¬, ∨ і →)

(XXII)  |= , |= (вираження 0 через ¬, ∧ і ∨,→)

(XXIII) |=  (вираження → через ¬ і ∨)

(XXIV) |= (вираження ↔ через ∧ і →)

(XXV)  |=   (вираження ∧ через ¬ і →)

(XXVI) |=  (вираження ∨ через ¬ і →)

**Хід заняття**

**Висловлення.**

**Задача 1.** Які з наступних оповідальних речень є висловленнями?

1. Київ - столиця України.

2. Студент факультету фізики, математики та інформатики університету.

3. Кожне ціле число є і числом раціональним.

4. Трикутник АВС подібний трикутнику А′В′С′.

5.Існує комплексне число х таке, що х2 < 0.

6. Для кожного дійсного числа х х + 1 > 0.

7. Каша – смачна страва.

8. х2 > 0.

9. х + х = 3(х+1)2.

10.У романі О. С. Пушкіна «Євгеній Онєгін» 136245 літер.

*Розв’язування.*

*2. Це речення не є висловленням, тому що воно нічого не стверджує про студента.*

*4. Речення не є висловленням: ми не можемо визначити, істинне воно або хибне, тому що не знаємо, про які саме трикутниках йде мова.*

*7. Речення не є висловленням, так як поняття «смачна страва» дуже невизначено.*

*10. Речення - висловлення, але для виявлення його значення істинності треба затратити багато часу.*

**Логічні операції.**

**Задача 2.** Нехай *v*1=1, *v*2=0, *v*3=1. Знайти значення наступних складових висловлень:

а) ;

б) .

**Задача 3.** Придумати два висловлення, що є кон'юнкцією (диз'юнкцією) трьох висловлень, одне з яких істинне, а інші хибні.

**Задача 4.** Записати за допомогою символів наступні висловлення, вживаючи букви для позначення простих висловлень:

а) 3 є простим числом і 9 – складене число;

б)  — ірраціональне число або існує раціональнечисло,що не є цілим;

в) Петро встане і він або Іван вийде;

г) Петро встане і вийде або Іван вийде;

д) студент не може навчатися, якщо він утомився або голодний;

е) у шаховому турнірі ні Петро, ні Іван не виграли свої відкладені партії;

є) якщо Петро спізниться і не піде на першу годину першої лекції, то він не буде задоволений, а якщо він не спізниться, то він буде задоволений;

ж) у степу не буде пилових буревіїв тоді і тільки тоді, коли будуть лісозахисні смуги; якщо лісозахисних смуг не буде, то пилові буревії знищать посіви і нанесуть збитки господарству;

з) або Петро піде на вечір відпочинку і Іван не піде на нього; або Петро не піде на вечір відпочинку і Іван приємно проведе час;

и) Петро ходить у кіно тільки в тому випадку, коли там показують комедію;

і) для того щоб натуральне число *а* було непарним, достатньо, щоб *а* було простим і більше за два;

й) необхідною умовою збіжності послідовності *S* є обмеженість *S*;

к) якщо «Шахтар» або «Динамо» програють і «Карпати» виграє, то «Таврія» втратить перше місце і, крім того, «Зоря» покине вищу лігу.

л) якщо у трикутнику медіана не є висотою і бісектрисою, то цей трикутник не рівнобедрений і не рівносторонній.

*Розв’язування.*

*л) виділимо і наступним чином позначимо прості складові висловлення:*

*А: «У трикутнику медіана є висотою»;*

*В: «У трикутнику медіана є бісектрисою»;*

*С: «Цей трикутник рівнобедрений»;*

*D: «Цей трикутник рівносторонній»;*

*Тоді дане висловлення символічно записується так:*

*(¬A∧¬B) →(¬C∧¬D).*

**Задача 5.**  Нехай *υ*1  буде «сьогодні світить сонце», *υ*2 *—* «сьогодні іде сніг», *υ*3 — «сьогодні похмуро» і *υ*4 *—* «учора було ясно». Перевести на звичайну мову наступні висловлення:

а) *υ*1*∧¬υ*3; б) *υ*2*∨* *υ*3; в) *υ*1*∧ ¬*(*υ*2*∨* *υ*3);

г) *υ*1*→ ¬*(*υ*3*∧ υ*2); д) *¬υ*1*↔ υ*4; е) (*υ*2*→ υ*3)*∨* *υ*1.

**Пропозиційні формули.**

**Задача 6.** Які з наступних виразів, що виписані без застосування угоди про опускання дужок, є пропозиційними формулами?

1. *;*
2. *;*
3. *;*
4. *;*
5. *;*
6. *((P∧Q)R)→¬S;*
7. *((P∧(¬Q→R))∨((¬P↔R)∧¬Q)).*

*Розв’язування.*

*е) Дана послідовність не є формулою вже тому , що у ній нема зовнішніх дужок. Покажемо, що вона не буде формулою навіть у тому випадку, якщо прийняти угоду про опускання зовнішніх дужок. Дійсно, пропозиційні змінні Р, Q, і R згідно п. 2. означення формули є формулами. Тоді, згідно п. 4 цього означення, послідовність (P∧Q) буде формулою. Але наступна послідовність (P∧Q)R формулою не буде, так як формули, що входять до неї (P∧Q) і R не з’єднані ні одним з припустимих символів:* ***∧****,****∨****,→,↔. Тому і дана послідовність не являється формулою.*

*ж) Згідно п.2 і 3-7 означення пропозиційні змінні Р, Q, і R і вирази ¬P, ¬Q, (¬Q→R), (¬P↔R) будуть формулами. Далі формулами будуть вирази (P∧(¬Q→R)), ((¬P↔R)∧¬Q). Вираз ((P∧(¬Q→R))∨((¬P↔R)∧¬Q)) також є формулою.*

**Задача 7.** Випишіть всі можливі підформули формули (згідно до домовленості зовнішні дужки у формули опущені):

((A↔B)∧¬ C)→(((A∨ B)→A)→¬ C)

*Розв’язування.*

*Всі можливі підформули формули ((A↔B)∧¬ C)→(((A∨ B)→A)→¬ C):*

*1. A*

*2. B*

*3.(A↔B)*

*4. C*

*5. ¬C*

*6. ((A↔B)∧¬ C)*

*7. (A∨ B)*

*8. ((A∨ B)→A)*

*9. (((A∨ B)→A)→¬ C)*

*10. (((A↔B)∧¬ C)→(((A∨ B)→A)→¬ C))*

**Задача 8.** Складіть таблицю істинності формули і вкажіть тип формули (тобто, чи є формула виконуваною або спростовною, або тотожно істинною (тавтологія), або тотожно хибною (заперечення):

((P∨¬Q)→Q)∧(¬P∨Q)

*Розв’язування.*

*Користуючись означеннями логічних зв'язок (операцій над висловленнями), складемо таблицю істинності даної формули. Логічні значення цієї формули записані у останній колонці таблиці, де формула зображена як F(P,Q):*

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Р* | *Q* | *¬Q* | *P∨¬Q* | *(P∨¬Q)→Q* | *¬P* | *¬P∨Q* | *F(P,Q)* |
| *0*  *0*  *1*  *1* | *0*  *1*  *0*  *1* | *1*  *0*  *1*  *0* | *1*  *0*  *1*  *1* | *0*  *1*  *0*  *1* | *1*  *1*  *0*  *0* | *1*  *1*  *0*  *1* | *0*  *1*  *0*  *1* |

*Із побудованої таблиці істинності бачимо, що дана формула виконувана, так якщо, наприклад, замість пропозиційної змінної Р підставити у формулу хибне висловлення, а замість Q – істинне, то вся формула перетвориться в істинне висловлення. Але ця формула є також спростовною, тому що, коли, наприклад, замість змінної Р підставити у формулу істинне висловлення, а замість Q – хибне, то вся формула перетвориться в хибне висловлення, тому вихідна формула є, ні тавтологія, ні заперечення.*

**Задача 9.** Побудуйте таблиці істинності і доведіть, що наступні формули є тавтологіями:

1. (P→Q) ↔(¬Q→¬P)
2. (P→Q) → ((P→ (Q→ R)) → (P→ R))

*Розв’язування.*

*1) (P→Q) ↔(¬Q→¬P)*

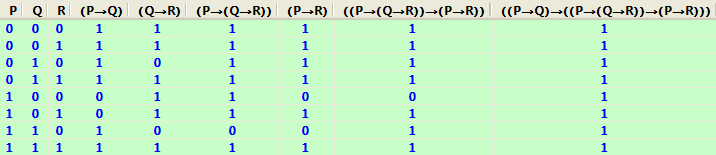
*Складемо таблицю істинності даної формули:*

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Р* | *Q* | *P→Q* | *¬Q* | *¬P* | *¬Q→¬P* | *(P→Q)→(¬Q→¬P)* |
| *0*  *0*  *1*  *1* | *0*  *1*  *0*  *1* | *1*  *1*  *0*  *1* | *1*  *0*  *1*  *0* | *1*  *1*  *0*  *0* | *1*  *1*  *0*  *1* | *1*  *1*  *1*  *1* |

*Таблиця показує, що при всіх можливих розподілах істинносних значень пропозиційних змінних Р і Q, формула завжди набирає значення 1. Тоді, формула – тавтологія.*

*2)* *(P→Q) → ((P→ (Q→ R)) → (P→ R))*

*Складемо таблицю істинності даної формули:*



*Таблиця показує, що при всіх можливих розподілах істинносних значень пропозиційних змінних Р, Q і R, формула завжди набирає значення 1. Тоді, формула – тавтологія.*

## Задачі для самостійного розв’язування

**1.1.** Випишіть всі можливі підформули кожної з наступних формул (згідно до домовленості зовнішні дужки у формул опущені):

1. ((A ∧ B) ↔C)→¬D
2. (A ∧ (¬B→C)) ∨((¬A ↔C) ∧¬B)
3. ((A ↔B) ∧¬C) → (((A∨B) → A) →¬C)
4. ((A∨B) ∨¬C) ∧ (¬A∨ (¬B∨C))
5. (A→B) → ((A→ ¬B) → (A∧B))
6. ((A→B) ∧ (C→D)) → (¬B∨D)
7. (A→B) → ((A→ ¬B) →¬B)
8. (A → (B ∧¬C)) ↔ (A∧ (B → C))
9. ¬A∨ (B ↔ ((A∧B) ∧¬C))
10. ((C ∨B) ∧A) → (((C∨A) → B) ↔ (A ↔B))
11. ((A∨ (B →¬C)) ∨D) ∧ (¬D∨ (¬B∨C))
12. ((A→ ¬D) ∨B) → ((C ↔¬D) → (¬A∧C))
13. ((A→B) ∧ ((¬A∨ (¬B∨C)) →D)) → (¬B∨D)
14. B↔ ((A→¬B) → ¬ (( ¬A↔ C) ∧¬B))
15. ((D→ ((C ∨B) ∧A)) ∧ (C∧A)) → (¬B∨D)

**1.2.** Складіть таблиці істинності для наступних формул і вкажіть, які з формул є виконуваними, які спростовними, які тотожно істинними (тавтологіями) і які тотожно хибними (запереченнями):

1. (P→Q) →((P→¬Q) →¬P)
2. (P∧ (Q∨¬P)) ∧ ((¬Q→P) ∨Q)
3. ((P∧¬Q) →Q) → (P→Q)
4. ((P∨¬Q) →Q) ∧ (¬P∨Q)
5. (P→Q) ∨ (P→ (Q∧P))
6. (¬P→¬ (Q∧P)) → (P∨R)
7. ((P∧¬Q) →Q) → (P→Q)
8. (P→ (Q→ R)) → (P→ Q)
9. (P∧ (Q∨¬P)) ∧ ((¬Q→P) ∨Q)
10. (Q→ (P∧R)) ∧¬ (( P∨R) → Q)
11. (P∧Q) → ((R∨Q) → (Q∧¬Q))
12. ((Q∧R) → (Q→¬ P)) →¬Q
13. ((P∨Q) ∨R) → ((P∨Q) ∧ (P∨R))
14. (P∨Q) → ((Q∨¬R) ∧ (R∨P))
15. (P∨Q) → ((¬P∧Q) ∨ (P∧¬Q))

**1.3.** Складіть таблиці істинності для наступних формул:

**1. a) **

**б) **

**2. а) **

**б) **

**3. а) **

**б) **

**4. а) **

**б) **

**5. а) **

**б) **

**6. а) **

**б) **

**7. а) **

**б) **

**8. а) **

**б) **

**9. а) **

**б) **

**10. а) **

**б) **

**11. а) **

**б) **

**12. а) **

**б) **

**13. а) **

**б) **

**14. а) **

**б) **

**15. а) **

**б) **

**1.4** Склавши таблиці істинності, доведіть наступні закони:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Варіант | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|  | 1,3 | 2,4 | 5,21 | 6,22 | 7,1 | 8,10 | 9,11 | 12,2 | 13,11 | 14,10 | 15,11 | 16,21 | 17,18 | 19,1 | 20,22 |

1. ¬(P∧¬P) (закон виключення суперечності)
2. ¬¬P↔P (закон подвійного заперечення)
3. ¬(P∨Q) ↔ (¬P∧¬Q) (другий закон де Моргана)
4. ¬(P∧Q) ↔ (¬P∨¬Q) (перший закон де Моргана)
5. ((P→Q) ∧ (Q→R)) → (P→R) (правило ланцюгового висновку)
6. ((Р∨Q) ∨R) ↔ (P∨ (Q∨R)) (комутативність диз’юнкції)
7. ((Р∧Q) ∧R) ↔ (P∧ (Q∧R)) (асоціативність кон’юнкції)
8. (P ∨ (Q∧P)) ↔P (другий закон поглинання)
9. (P∧ (Q∨P)) ↔P (перший закон поглинання)
10. (P∨P) ↔P (ідемпотентність диз’юнкції )
11. (P∧P) ↔P (ідемпотентність кон’юнкції)
12. (P↔Q) ↔ (¬P↔¬Q) (закон протилежності)
13. (P→Q) ↔ (¬P∨Q) (закон заміни імплікації)
14. (P∨Q) ↔ (¬P→Q) (закон заміни дизюнкції)
15. (P↔Q) ↔ ((P→Q) ∧ (Q→P)) (закон заміни еквіваленції)
16. (P→Q) ↔ (¬Q→¬P) (закон контрапозиції)
17. (P∨Q) ↔ (Q∨P) (комутативність диз’юнкції)
18. (P∧Q) ↔ (Q∧P) (комутативність кон’юнкції)
19. (Р∨ (Q∧R)) ↔ ((P∨Q) ∧ (P∨R)) (дистрибутивність диз’юнкції

відносно кон’юнкції)

1. (Р∧ (Q∨R)) ↔ ((P∧Q) ∨ (P∧R)) (дистрибутивність кон’юнкції

відносно диз’юнкції)

1. P→P (закон тотожності)
2. Р∨¬Р (закон виключеного третього)

**1.5.** Склавши таблиці істинності наступних формул, доведіть, що всі вони є тавтологіями:

1. ((P→Q) ∧ (P→¬Q)) →¬P
2. ((P→Q) →P) →P
3. (P↔Q) → (P→Q) → ( (P→Q) ∨ (Q→P))
4. (A→ (B→ C)) ↔ ((A∧B) →C)
5. (P→ (Q→ R)) → ((P→ Q) → (P→ R))
6. (P→ (Q→ R)) ↔ (Q→ (P→ R))
7. (P→Q) → ((P→ (Q→ R)) → (P→ R))
8. (P→Q) → ((P→¬Q) →¬P)
9. (P→Q) → ((Q→ P) → (P↔Q))
10. (P↔Q) → (P→Q) та (P→Q) ∨ (Q→P)
11. ((P∧Q) → P)→ (Q→ (P∧Q))
12. (P→R) → ((P∨Q) → (R∨Q))
13. (P→R) →((Q→R) →((P∨Q) →R))
14. (Р → (Q ∧ R)) ↔ ((Р→ Q) ∧ (Р→ R))
15. P→ (P∨Q) ∧P→(Q→ P)

# **Лабораторна робота2.**

Тема: Рівносильність формул. Спрощення систем висловлень.

**Мета:** Засвоїти поняття рівносильності формул. Познайомити з основними рівносильностями алгебри висловлень. Сформувати вміння та навички застосування основних рівносильностей для перетворення формул. Сформувати вміння та навички застосування рівносильних перетворень для спрощення систем висловлень.

**План**

* **Рівносильність формул алгебри висловлень.**
* **Основні рівносильності алгебри висловлень.**
* **Спрощення систем висловлень.**

**Короткі теоретичні відомості**

*Спрощення сукупності висловлень* засновано на тому, що в залежності від умови задачі, необхідно скласти кон’юнкцію або диз’юнкцію вихідних висловлень, а потім привести її еквівалентними перетвореннями до кон’юнкції або диз’юнкції більш простого виду, тим самим можна отримати більш просту систему висловлень, еквівалентну до даної.

Дві пропозиційні формули *А* (*Х*1, *Х*2, ..., *Х*n) і *В* (*Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n) назвемо *рівносильними* (або *еквівалентними*), якщо для будь-яких наборів значень змінних *Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n вони приймають однакові значення. У цьому випадку будемо писати *А* (*Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n) ≡ *В* (*Х*1, *Х*2, *...*, *Х*n) (або *А* ≡ *В* ). Символ “≡” не є символом операції алгебри висловлень, а означає певне відношення між формулами, які знаходяться ліворуч та праворуч від символу “≡”.

Беручи до уваги означення операції “↔”, а також означення тавтології і рівносильності, можна зробити висновок, що кожну тавтологію, в якої головна операція еквіваленція, можна записати як рівносильність двох відповідних формул. Інакше кажучи, ця тавтологія породжує певну рівносильність. Так, тавтології (ІІ) |=*¬¬p↔p* (закон подвійного заперечення) відповідає рівносильність (1*°*) *¬¬A≡A*; законам ідемпотентності (ІІІ) і (ІV) відповідають рівносильності (10*°*) і (11*°*). Зазначимо, що кожна з таких рівносильностей отримує назву відповідної тавтології.

Перелічимо *найважливіші рівносильності* алгебри висловлень де *A*, *B і* *C* є будь-якою пропозиційною формулою:

(1*°*)  (закон подвійного заперечення)

(2*°*) 

(3*°*)  (закони комутативності)

(4*°*) 

(5*°*)  (закони асоціативності)

(6*°*) 

(7*°*)  (закон дистрибутивності ∧ відносно ∨)

(8*°*)  (закон дистрибутивності ∨ відносно ∧)

(9*°*)  (закони де Моргана)

(10*°*) 

(11*°*)  (закони ідемпотентності)

(12*°*) 

(13*°*) 

(14*°*) 

(15*°*) 

(16*°*) 

(17*°*)  (властивості 0 та 1)

(18*°*)

(19*°*) 

(20*°*) 

(21*°*) 

(22*°*) 

(23*°*)   (вираження одних операцій через інші)

(24*°*) 

(25*°*) 

(26*°*) (закони поглинання)

(27*°*)

Використовуючи основні рівносильності алгебри висловлень, можемо від однієї формули переходити до рівносильної їй формули. Так само в будь-якій пропозиційній формулі можна замінити довільну її частину, що є пропозиційною формулою, рівносильною і при цьому одержати пропозиційну формулу, рівносильну даній. Такий перехід називається *рівносильним перетворенням* вихідної формули. У тих питаннях, у яких дану пропозиційну формулу можна замінити на рівносильну їй, основні рівносильності алгебри висловлень дозволяють приводити формули до більш простого (по числу символів) або більш зручного вигляду.

**Хід заняття**

**Задача 1.** Довести, що відношення рівносильності є відношенням еквівалентності.

**Задача 2.** Вивести наступні рівносильності із зазначених (при цьому поряд із зазначеною рівносильністю можуть бути використані інші рівносильності, крім виведеної, і, можливо, деякі твердження типу: якщо A ≡ B, то ¬A ≡¬B):

**Задача 3.** Довести, що пропозиційні формули, що містять тільки символ ↔, або, інакше кажучи, формули у мові{↔} є тавтологією тоді і тільки тоді, коли кожна змінна входить до неї парне число разів.

**Задача 4**. Довести, що ніяка пропозиційна формула у мові {∧, ∨} не є: 1) тавтологією; 2) суперечністю.

**Задача 5.** Наступну формулу перетворіть рівносильним чином так, щоб вона містила тільки операції ¬, ∨, ∧ і, щоб заперечення відносились тільки до пропозиційних змінних і не стояло б перед дужками:

(X∨Y) *↔* (*¬*X*→* Z)

*Розв’язування.*

*(X∨Y) ↔ (¬X→Z) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*X∨Y↔¬¬X∨Z =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*X∨Y↔X∨Z =*

*Вираження еквiваленцii через iмплiкацiю та кон'юнкцiю (25°)*

*(X∨Y→X∨Z) ∧ (Z∨X→Y∨X) =*

*Вираження iмплiкацii через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(X∨Y→X∨Z) ∧ ( ¬ (Z∨X)∨Y∨X) =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*(X∨Y→X∨Z)∧( ¬Z∧¬X∨Y∨X) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬(X∨Y)∨X∨Z)∧(¬Z∧¬X∨Y∨X) =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*(¬X∧¬Y∨X∨Z)∧(¬Z∧¬X∨Y∨X)*

**Задача 6.** Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що формула є тавтологією:

(P*→*Q) *→* ((P*→* (Q*→* R)) *→* (P*→* R))

*Розв’язування.*

*(P→Q) → ((P→ (Q→ R)) → (P→ R))*

*Покажемо, що ця формула рівносильна 1 (істинному висловленню):*

*(P→Q)→((P→(Q→R))→(P→R)) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(P→Q)→((P→(Q→R))→ ¬P∨R) =*

*Вираження iмплiкацiїчерез диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(P→Q)→((P→¬Q∨R)→ ¬P∨R) =*

*Вираження iмплiкацiїчерез диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(P→Q)→( ¬P∨¬Q∨R→¬P∨R) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(P→Q)→ ¬ (¬P∨¬Q∨R)∨ ¬P∨R =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*(P→Q)→¬(¬P∨¬Q) ∧¬R∨¬P∨R =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*¬P∨Q→¬(¬P∨¬Q) ∧¬R∨¬P∨R =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*¬(¬P∨Q)∨¬(¬P∨¬Q) ∧¬R∨¬P∨R =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*¬¬P∧¬Q∨¬(¬P∨¬Q)∧¬R∨¬P∨R =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*P∧¬Q∨¬(¬P∨¬Q)∧¬R∨¬P∨R =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*P∧¬Q∨¬¬P∧¬¬Q∧¬R∨¬P∨R =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*P∧¬Q∨P∧¬¬Q∧¬R∨¬P∨R =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*P∧¬Q∨P∧Q∧¬R∨¬P∨R =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*P∧¬Q∨P∧Q∧¬R∨R∨¬P =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*P∧¬Q∨(P∧Q∨R)∧(¬R∨R)∨¬P =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*P∧¬Q∨(P∧Q∨R)∧(1)∨¬P =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*P∧¬Q∨P∧Q∨R∨¬P =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*P∧(¬Q∨Q)∨R∨¬P =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*P∧(1)∨R∨¬P =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*P∨R∨¬P =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*P∨¬P∨R =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*1∨R =1*

*Закон одиницi вiдносно диз'юнкцiї (17°)*

**Задача 7**. Застосовуючи рівносильні перетворення, приведіть наступну формулу до можливо більш простої форми:

¬((P∨Q) ∧ (P∧ ¬R))

*Розв’язування.*

*Для того щоб привести дану формулу* *до можливо більш простої форми, необхідно знайти логічно еквівалентну їй формулу, яка містить менше число символів:*

*¬ ((P∨Q)∧(P∧¬R)) =*

*Закон де Моргана для кон'юнкцiї(9°)*

*¬ (P∨Q)∨ ¬ (P∧¬R) =*

*Закон де Моргана для кон'юнкцiї (9°)*

*¬ (P∨Q)∨ ¬P∨¬¬R =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*¬ (P∨Q)∨ ¬P∨R =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*¬P∧¬Q∨¬P∨R =*

*Закон поглинання вiдносно кон'юнкцiї (27°) = ¬p∨R*

**Задача 8.** Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що формула є тотожно хибною (запереченням):

(X→Y) ∧ (Y→X) ∧ ((X∧ ¬Y)  (¬X∧ Y))

*Розв’язування.*

*(X→Y) ∧ (Y→X) ∧ ((X∧ ¬Y)  (¬X∧ Y))*

*Покажемо, що ця формула рівносильна 0 (хибному висловлюванню):*

*(X→Y)∧(Y→X)∧((X∧¬Y)∧(¬X∧Y)) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(X→Y)∧(¬Y∧X)∧(X∧¬Y∧¬X∧Y) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(X→Y)∧(X∧¬Y)∧(X∧¬Y∧¬X∧Y) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*(X→Y)∧((X∧¬Y)∧X∧¬Y∧(X∧¬Y)∧¬X∧Y) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∧Y)∧((X∧¬Y)∧X∧¬Y∧(X∧¬Y)∧¬X∧Y) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧X∧¬Y∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬X∧Y =*

*Вираження кон'юнкцiї через iмплiкацiю та заперечення (23°)*

*(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(X→¬¬Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬X∧Y =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(¬X∧¬¬Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬X∧Y =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(¬X∧Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬X∧Y =*

*Вираження кон'юнкцiї через iмплiкацiю та заперечення (23°)*

*(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(¬X∧Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(¬X→¬Y) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(¬X∧Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(¬¬X∧¬Y) =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(¬X∧Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(X∧¬Y) =*

*Закон комутативностi кон'юнкцiї (2°)*

*(¬X∧Y)∧¬(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(X∧¬Y) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*0∧(X∧¬Y)∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(X∧¬Y) =*

*Закон нуля вiдносно кон'юнкцiї (16°)*

*0∧(¬X∧Y)∧(X∧¬Y)∧¬(X∧¬Y) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*0∧(¬X∧Y)∧0 =*

*Закон нуля вiдносно кон'юнкцiї (16°)*

*0∧0 =0*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

**Задача 9.** Спростити систему висловлень, якщо всі висловлення, що входять до системи, істинні. Спростити систему, це означає знайти логічно еквівалентну їй систему, що складається з меншої кількості не більш складних висловлень:

A→B, C→B, (B∧C)→A

*Розв’язування.*

*Спрощення даної сукупності висловлень спирається на те, що кожне з висловлень буде істинним тоді і тільки тоді, коли істинна кон’юнкція всіх цих висловлень. Тому, склавши кон’юнкцію з даних висловлень і приводячи її еквівалентними перетвореннями до кон’юнкції більш простого виду, можна отримати більш просту систему висловлень, еквівалентну даній:*

*A→B,C→B,(B∧C)→A*

*Об'єднуємо висловлення знаком кон'юнкцiї.*

*(A→B)∧(C→B)∧((B∧C)→A) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(A→B)∧(C→B)∧(¬(B∧C)∨A) =*

*Закон де Моргана для кон'юнкцiї (9°)*

*(A→B)∧(C→B)∧(¬B∨¬C∨A) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(A→B)∧(C→B)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(A→B)∧(¬C∨B)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*(A→B)∧(¬C∨B∨0)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(A→B)∧(¬C∨B∨A∧¬A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(A→B)∧(¬C∨(B∨A)∧(B∨¬A))∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(A→B)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬A∨B)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*(¬A∨B∨0)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(¬A∨B∨C∧¬C)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(¬A∨(B∨C)∧B∨¬C))∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(¬A∨B∨C)∧(¬A∨B∨¬C)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон комутативностi кон'юнкцiї (2°)*

*(¬A∨B∨C)∧(¬A∨B∨¬C)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(¬A∨B∨C)∧(¬A∨¬C∨B)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(¬A∨B∨C)∧(¬C∨¬A∨B)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(¬A∨B∨C)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон iдемпотентностi кон'юнкцiї (12°)*

*(¬A∨B∨C)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(¬A∨C∨B)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(C∨¬A∨B)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*((C∨B)∧(¬C∨B)∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*((C∧¬C)∨B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*((0)∨B∨¬A)∧¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*(B∨¬A)∧(¬C∨B∨A)∧(¬C∨¬B∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(B∨¬A)∧((¬C∨B)∧(¬C∨¬B)∨A) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(B∨¬A)∧(¬C∨B∧¬B∨A) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(B∨¬A)∧(¬C∨0∨A) =*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°) (B∨¬A)∧(¬C∨A) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°) (B∨¬A)∧(C→A) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°) (A→B)∧(C→A)*

*Вихiдна система висловлень A→B,C→B,(B∧C)→A логiчно еквiвалентна наступнiй*

*A→B, C→A*

*Всі висловлення даної системи будуть істинні тоді і тільки тоді, коли будуть істинні висловлювання А→В і С→А.*

*Тому дана система висловлювань A→B,C→B,(B∧C)→A є логічно еквівалентною більш простій системі двох висловлень А→В,С→А.*

**Задача 10.** Спростити систему висловлень, якщо відомо, що з висловлень, які входять до неї, що найменше одне з них істинне:

A∧B∧¬C, ¬(A→B)∧¬C, ¬A∧¬(B→C)

*Розв’язування.*

*A∧B∧¬C, ¬ (A→B) ∧¬ C, ¬ A∧ ¬ (B→C)*

*Що найменше одне з висловлень даної сукупності буде істинним тоді і тільки тоді, коли істинна диз’юнкція всіх даних висловлень. Тому, склавши диз’юнкцію з даних висловлень і приводячи її еквівалентними перетвореннями до диз’юнкції більш простого виду, можна отримати більш просту систему висловлень, еквівалентну даній. У нашому випадку маємо наступну диз’юнкцію, яку послідовно спрощуємо:*

*A∧B∧¬C,¬ (A→B) ∧¬ C,¬ A∧¬ (B→C)*

*Об'єднуємо висловлення знаком диз'юнкцiї*

*(A*∧*B*∧*¬C)∨(¬(A→B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*¬(B→C)) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(A*∧*B*∧*¬C)∨(¬(¬A∨B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*¬(B→C)) =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*(A*∧*B*∧*¬C)∨((¬¬A*∧*¬B)*∧ *¬C)∨(¬A*∧*¬(B→C)) =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*(A*∧*B*∧*¬C)∨((A*∧*¬B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*¬(B→C)) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(A*∧*B*∧*¬C)∨((A*∧*¬B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*¬(¬B∨C)) =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*(A*∧*B*∧*¬C)∨((A*∧*¬B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*(¬¬B*∧*¬C)) =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*(A*∧*B*∧*¬C)∨((A*∧*¬B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*(B*∧*¬C)) =*

*Закон iдемпотентностi диз'юнкцiї (11°)*

*((A*∧*B)*∧*¬C)∨((A*∧*B)*∧*¬C)∨((A*∧*¬B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*(B*∧*¬C)) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*((A*∧*B)*∧*¬C)∨(((A*∧*B)∨(A*∧*¬B))*∧*¬C)∨(¬A*∧*(B*∧*¬C)) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*((A*∧*B)*∧*¬C)∨((A*∧*(B∨¬B))*∧*¬C)∨(¬A*∧*(B*∧*¬C)) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*((A*∧*B)*∧*¬C)∨((A*∧*(1))*∧*¬C)∨(¬A*∧*(B*∧*¬C)) =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*((A*∧*B)*∧*¬C)∨((A)*∧*¬C)∨(¬A*∧*(B*∧*¬C)) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*((A*∧*B)*∧*¬C)∨(¬A*∧*(B*∧*¬C))∨(A*∧*¬C) =*

*Закон асоцiативностi кон'юнкцiї (5°)*

*((A*∧*B)*∧*¬C)∨((¬A*∧*B)*∧*¬C)∨(A*∧*¬C) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiївiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*(((A*∧*B)∨(¬A*∧*B))*∧*¬C)∨(A*∧*¬C) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*(((A∨¬A)*∧*B)*∧*¬C)∨(A*∧*¬C) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*(((1)*∧*B)*∧*¬C)∨(A*∧*¬C) =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiiї(13°)*

*((B)*∧*¬C)∨(A*∧*¬C) =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(A*∧*¬C)∨(B*∧*¬C)*

*Вихiдна система висловлень A*∧*B*∧*¬C,¬(A→B)*∧*¬C,¬A*∧*¬(B→C) логiчно еквiвалентна наступнiй*

*(A*∧*¬C), (B*∧*¬C)*

*Таким чином, що найменше одне висловлення даної системи буде істинне тоді і тільки тоді, коли буде істинне одне із висловлень А****∧****¬С або В****∧****¬С. Тому дана система трьох висловлювань A*∧*B*∧*¬C, ¬(A→ B)*∧*¬C, ¬A*∧*¬(B→ C) є логічно еквівалентною більш простій системі двох висловлень А****∧****¬С, В****∧****¬С.*

## Задачі для самостійного розв’язування

**2.1.** Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що всі формули є тавтологіями:

1. (PQ)  ((P (Q R))  (P R))
2. P (Q (PQ))
3. P (PQ)  (PQ) P
4. (Р → (Q ∧ R)) ↔((Р → Q) ∧ (Р → R))
5. ((PQ)  (PQ)) P
6. (PR)  ((QR)  ((PQ) R))
7. (PQ)  ((P Q)  P)
8. (PQ)  (QP)
9. (PQ)  ((Q P)  (PQ))
10. ((PQ) P) P
11. (PQ)  (P Q)
12. (PR)  ((PQ)  (RQ))
13. (P (Q R))  ((P Q)  (P R))
14. (A (B C))  ((AB)  C)
15. (P (Q R))  (Q (P R))
16. (A (B (C (D (E F))))) ((ABCDE) F)

**2.2**. Застосовуючи рівносильні перетворення, приведіть наступні формули до можливо більш простої форми:

1.  ((PQ)  (P R))
2. (PQ)  (PQ)
3.  ((PQ) Q)  ( PQ)
4. (PQ)  (PQ)  (PQ)
5. (PQR)  (PQR)  (QR)
6. (PQ→ (R→ QQP))  (P (P→ P)) → Q
7. ((P (PP→QQ)) →R)P(QR)
8. (P(QR→QR))(P PQ)P(Q (PP))
9.  ( P∨Q) →((P∨Q) →P)
10.  ( P∧ Q) ∨((P→Q) ∧P)
11. (P→Q) ∧(Q→P) ∧(P∨Q)
12. (PQ)  (QP)  (RP)
13. (PR)  (PR)  (QR)  (PQR)
14.  ((PQ)  (QP))
15. ( (PQ) (PQR)) ( PR)
16. (PQR)  (PQR)  (PQR)  (PQR)

**2.3.** Наступні формули перетворіть рівносильним чином так, щоб вони містили у собі тільки операції ¬, ∨, ∧ і, щоб заперечення було віднесено тільки до пропозиційних змінних і не стояло б перед дужками:

1. (XY)  (X Z)
2. (XY)  (XY)
3. ((XYZ) X) Z
4. ((XY) Z) X
5. (X  (YZ)) X
6. (X → Y) → (Y∧Z)
7. (X∧Y)  (X∧Y)
8. ((XY) →Z) → (ZY)
9. ((X (YZ))  (Y X)) Y
10. ((X→Y) ∧(Y→Z)) →(X→Z)
11. ((XY)  (YX))  (XY)
12. ((XY)  (YX))  (ZX)
13. ((XY)  ( XY))  ((XY)  ( XY))
14. ((XY) Z)  (XZ)
15. (X (YZ))  ((X Y)  Z)

**2.4.** Проводячи рівносильні перетворення з використанням основних рівносильностей, доведіть, що всі формули є тотожно хибними (запереченнями):

1. X (XY)  (XY)
2. XY (X YZ)  Z
3. (XY)  (YX)  ((X Y)  (X Y))
4. ((XY)  (X (XY)))  ((X (X Y))  (X Y))
5. ((XY)  (YZ))   (X Z)
6. (X→Y) ∧(X→Y) ∧X
7. ((XY)  (XZ))  ((XY)  (XZ))
8. P∧(Q∧(P∨Q))
9. (((X→Y) ∧(Y→Z)) →(X→Z))
10. (X∧Y) (X∧Y)
11. (A  (B C))  (A(B  C))
12. ((C B) A)  (((CA)  B) (A B))
13. ((A B) C)  (((AB)  A) C)
14. ((XY)  (XZ))  ((XY)  (XZ))
15. (((X→Y) ∧(Y→Z)) →(X→Z))

**2.5.а** Спростіть наступні системи висловлень, якщо відносно них відомо, що всі висловлення, що входять до системи, істинні (задача 9):

1. A→B, C→B, (B∧C)→A
2. C→(A∨B), (B∧C)→A, (A∧B)→C
3. A→(B∨C), B→(A∨C), (A∧B)→C
4. A→B, A→(B∨C), B→C
5. P→(Q∨R), W→(S∨T), R→(Q∨¬P), (W∧T)→¬S
6. W→(M∨S), R→T, ¬Q→T, M→(S∨W), P→(T∨R)
7. ¬A→(B∨C), B→¬(A∧C), C→(A∨¬B), A→(B∨C), (A∧C)→B,(¬A∧¬B)→C

**2.5.б** Спростіть наступні системи висловлень, якщо відносно них відомо, що з усіх висловлень, що входять до системи, що найменше одне з них істинне (задача 10):

1. A∧B∧¬C, ¬(A→B)∧¬C, ¬A∧¬(B→C)
2. ¬(A→B), ¬B∧A, ¬B∧C, ¬(C→A)
3. A∧B∧C, ¬A∧¬B∧¬C, A∧B∧¬C, ¬(A∨B∨¬C)
4. A→B, A→C, B→(A∧C)
5. X∧Y∧Z, X∧¬(Y→Z), ¬(X→Y)∧Z,¬(X∨¬Y)∧Z
6. X∧Y, ¬(X∨¬Y), ¬(X→Y)
7. ¬X∧Y∧Z, ¬((X∧Y)→¬Z),Y∧Z
8. P∧R, ¬(P→R), Q∧R, ¬P∧Q∧R

# **Лабораторна робота3.**

Тема: Відшукання нормальних форм.

**Мета:** Отримати загальні відомості про нормальні форми формул алгебри висловлень. Вивчити методи відшукання нормальних форм. Сформувати навички і вміння застосування алгоритмів відшукання нормальних форм для формул алгебри висловлень. Закріпити вміння та навички відшукання нормальних форм для формул алгебри висловлень заданих своїми значеннями.

**План**

* **Кон‘юнктивні (диз‘юнктивні) одночлени.**
* **Кон‘юнктивні (диз‘юнктивні) нормальні форми формул алгебри висловлень.**
* **Методи відшукання кон‘юнктивних (диз‘юнктивних) нормальних форм.**
* **Методи відшукання досконалих кон‘юнктивних (диз‘юнктивних) нормальних форм для формул заданих своїми значеннями.**

**Короткі теоретичні відомості**

Нехай *v* є 0 або 1. Введемо позначення:

 якщо 

 =

 якщо 

Пф  має значення 1 тоді і тільки тоді, коли . Звідси виходить, що пф  нанаборі () має значення 1, а на кожному іншому наборі значень своїх змінних , відмінному від зазначеного, - значення 0. Аналогічно пф  має значення 0, тільки на одному наборі ().

Нехай кожне з  є 0 або 1. Пропозиційна формула (пф) від змінних  виду  називається *кон’юнктивним одночленом*.

Пропозиційна формула від змінних  виду  називається *диз’юнктивним одночленом*.

Пропозиційна формула, що рівносильна даній і має вигляд, де  - диз’юнктивний (кон’юнктивний) одночлен, називається *диз’юнктивною* (*кон’юнктивною*) *нормальною* *формою* (скорочено ДНФ (КНФ)) даної пф.

Диз’юнктивні (кон’юнктивні) одночлени від *X1,X2,…,Xn* змінних, що задовольняють таким умовам:

1) кожний диз’юнктивний (кон’юнктивний) одночлен має рівно *п* членів;

2) у кожному диз’юнктивному (кон’юнктивному) одночлені зустрічаються усі *п* змінних  *X1,X2,…,Xn* і кожна з цих змінних входить до нього рівно один раз зі знаком заперечення чи без знаку заперечення, називається *досконалими диз’юнктивними* (*кон’юнктивними*) *одночленами.*

ДНФ (КНФ) пропозиційної формули *A(X1,X2,…,Xn)*, де кожен диз’юнктивний (кон’юнктивний) одночлен є досконалим і всі дані одночлени попарно різні називається *досконалою диз’юнктивною (кон’юнктивною) нормальною формою* (скорочено ДДНФ (ДКНФ)).

**Правило відшукання ДДНФ.**

Дану пропозиційну формулу за рівносильностями (25°) і (21°), застосовуючи їх необхідне число разів, можна перетворити на їй рівносильну, що не має символів ↔  і →, якщо вони в ній були. Потім, застосовуючи визначене число разів рівносильності (1°), (7°), (9°) — (12°), отримуємо ДНФ даної пф.

Більше того, якщо вихідна пропозиційна формула не є протиріччям, то можна отримати її ДНФ, що має різні кон’юнктивні одночлени, у кожному з яких немає входжень одних і тих самих змінних, які повторюються. Така ДНФ не буде ДДНФ тільки в тому випадку, якщо який-небудь кон’юнктивний одночлен її не має усіх змінних, що входять до вихідної пф. Але якщо, наприклад, кон’юнктивний одночлен   не має змінної , то наступні рівносильні перетворення

  
дають два кон’юнктивних одночлена, кожен з яких містить «невистачаючу» змінну . З цього слідує, що виконуючи таке перетворення визначене число разів, з такої ДНФ можна отримати ДДНФ.

Приклади. Знайдемо ДНФ пф *і* *.* Маємо:

* * Перетворюємо ДНФ пф  на ДДНФ:

**

**Правило відшукання ДКНФ.**

Дану пф за рівносильностями (25°) і (22°), застосовуючи їх необхідне число разів, можна перетворити на їй рівносильну, що не має символів ↔  і →, якщо вони в ній були. Потім, застосовуючи визначене число разів рівносильності (1°), (8°) — (12°), отримуємо КНФ даної пф.

Більше того, якщо вихідна пф не є тавтологією, то можна отримати її КНФ, що має різні диз’юнктивні одночлени, у кожному з яких немає входжень одних і тих самих змінних, які повторюються. Така КНФ не буде ДКНФ тільки в тому випадку, якщо який-небудь диз’юнктивний одночлен її не має усіх змінних, що входять до вихідної пф. Але якщо, наприклад, диз’юнктивний одночлен   не має змінної , то наступні рівносильні перетворення



дають два диз’юнктивних одночлена, кожен з яких містить «невистачаючу» змінну . З цього слідує, що виконуючи таке перетворення визначене число разів, з такої КНФ можна отримати ДКНФ.

Приклади. Знайдемо КНФ пф  и*.* Маємо:





Перетворимо КНФ пф   на ДКНФ:



**Правило написання ДДНФ (ДКНФ) для формули, заданої своїми значеннями:**

1. необхідно вибрати всі ті набори значень її змінних, на яких формула приймає значення 1 (значення 0);
2. для кожного такого набору виписати досконалі кон’юнктивні (диз’юнктивні) одночлени, що приймають значення 1 (значення 0) лише на цьому наборі;
3. отримані досконалі кон’юнктивні (диз’юнктивні) одночлени з’єднати знаком диз’юнкції (кон’юнкції).

Приклад.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

ДДНФ: 

ДКНФ:



**Методичні вказівки**

1. Для знахождения **ДДНФ** з таблицы істинності виділити лишь ті рядки, результат яких дорівнює 1. Для данной функціі

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| F= ( | X | v | Y | ) | v | Z | → | ( | Z | Λ | Y | ) |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | ~Y | Xv~YvZ | ~Z | ~Z^Y | F |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |

набір рядків буде наступним:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  | | --- | | X | | |  | | --- | | Y | | |  | | --- | | Z | | |  | | --- | | \_ | | Y | | |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  | \_ | | X | v | Y | | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  | \_ |  |  |  | | ( | X | v | Y | ) | v | Z | | |  | | --- | | \_ | | Z | | |  |  |  | | --- | --- | --- | | \_ |  |  | | Z | Λ | Y | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  | \_ |  |  |  |  |  | \_ |  |  |  | | ( | X | v | Y | ) |  | Z | → | ( | Z | Λ | Y | ) | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

F(0,1,0) = F(1,1,0)=1

Для кожного рядка виписуємо конюнкцію всіх змінних за правилом:

Потім всі конюнкції зєднуємо диз’юнкцією

1. Для знахождения **ДКНФ** з таблицы істинності виділити лишь ті рядки, результат яких дорівнює 0. Для данной функціі набір рядків буде наступним:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X | Y | Z | ~Y | Xv~YvZ | ~Z | ~Z^Y | F |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |  |

F(0,0,0)=F(0,0,1)=F(0,1,1)=F(1,0,0)=F(1,0,1)=F(1,1,1)=0

Для кожного рядка виписуємо дизюнкцію всіх змінних за правилом:

Потім всі дизюнкції зєднуємо кон’юнкцією

**Задача 1.** Знайдіть найпростішу формулу від трьох змінних серед рівносильних формул, останній стовпчик таблиці істинності якої має вигляд:

F=(11001100).

*Розв’язування.*

*Так як формула залежить від трьох змінних, то нехай це будуть А,В,С.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***A*** | ***B*** | ***C*** | ***F(A, B, C)*** |
| *0* | *0* | *0* | *1* |
| *0* | *0* | *1* | *1* |
| *0* | *1* | *0* | *0* |
| *0* | *1* | *1* | *0* |
| *1* | *0* | *0* | *1* |
| *1* | *0* | *1* | *1* |
| *1* | *1* | *0* | *0* |
| *1* | *1* | *1* | *0* |

*Для знаходження формули можна скористатися як ДДН-формой, так i ДКН-формой, так як кiлькiсть нулiв та одиниць в останньому стовпчику таблицi iстинностi однакова. Скористаємося, наприклад, ДКН-формою. Видiляємо тi набори значень змiнних, для яких формула приймає значення 0:*

*F(0,1,0) = F(0,1,1) = F(1,1,0) = F(1,1,1) = 0. Виписуємо ДКН-форму, яка задовольняє цим умовам.*

*F(А,В,С)≡ (A∨¬B∨C)∧(A∨¬B∨¬C)∧(¬A∨¬B∨C)∧(¬A∨¬B∨¬C)*

*Спрощуємо її за допомогою рiвносильних перетворень:*

*(A∨¬B∨C)∧(A∨¬B∨¬C)∧(¬A∨¬B∨C)∧(¬A∨¬B∨¬C) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(A∨¬B∨(C∧¬C))∧(¬A∨¬B∨C)∧(¬A∨¬B∨¬C) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(A∨¬B∨(0))∧(¬A∨¬B∨C)∧(¬A∨¬B∨¬C) =*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(A∨¬B)∧(¬A∨¬B∨C)∧(¬A∨¬B∨¬C) =(A∨¬B)∧(¬A∨¬B∨(C∧¬C)) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(A∨¬B)∧(¬A∨¬B∨(0)) =(A∨¬B)∧(¬A∨¬B) =(A∧¬A)∨¬B =(0)∨¬B =¬B.*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

**Задача 2.** Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до диз‘юнктивної нормальної форми:

¬(X∨Z)∧(X→Y)

*Розв’язування.*

*¬(X∨Z)∧(X→Y) =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*(¬X∧¬Z)∧(X→Y) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∧¬Z)∧(¬X∨Y) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*((¬X∧¬Z)∧¬X)∨((¬X∧¬Z)∧Y) =*

*Закон комутативностi кон'юнкцiї (2°)*

*(¬X∧(¬X∧¬Z))∨((¬X∧¬Z)∧Y) =*

*Закон асоцiативностi кон'юнкцiї (5°)*

*((¬X∧¬X)∧¬Z)∨((¬X∧¬Z)∧Y) =*

*Закон iдемпотентностi кон'юнкцiї (12°)*

*(¬X∧¬Z)∨ (¬X∧¬Z∧Y)*

*Дана формула має наступну ДН-форму:*

*(¬X∧¬Z)∨(¬X∧Y∧¬Z)*

**Задача 3.** Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до кон‘юнктивної нормальної форми:

(X↔Y)∧¬(Z→T)

*Розв’язування.*

*(X↔Y)∧¬(Z→T) =*

*Вираження еквiваленцiї через iмплiкацiю та кон'юнкцiю (25°)*

*(X→Y)∧(Y→X)∧¬(Z→T) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∨Y)∧(Y→X)∧ ¬(Z→T) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∨Y)∧(¬Y∨X)∧¬(Z→T) =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∨Y)∧(¬Y∨X)∧¬(¬Z∨T) =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*(¬X∨Y)∧(¬Y∨X)∧¬¬Z∧¬T =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*(¬X∨Y)∧(¬Y∨X)∧Z∧¬T*

*Дана формула має наступну КН-форму:*

*(¬X∨Y)∧(X∨¬Y)∧Z∧¬T*

**Задача 4.** Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до досконалої диз‘юнктивної нормальної форми:

X∨(Y∧Z)

*Розв’язування.*

*Кон’юнктивний одночлен Y ∧ Z не є досконалим вiд трьох змiнних X,Y i Z, так як до нього не входить змiнна X. Введення змiнної X робиться наступним чином:*

*X∨(Y∧Z) =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*X∨((Y∧Z)∧1) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*X∨((Y∧Z)∧(X∨¬X)) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*X∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*В одночленi X не вистачає двох змiнних Y i Z. Введемо спочатку змiнну Y:*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*(X∧1)∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*(X∧(Y∨¬Y))∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z) ∧¬X) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*(X∧Y)∨(X∧¬Y)∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*В одночленi X ∧¬Y не вистачає змiнної Z. Введемо змiнну Z:*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*(X∧Y)∨((X∧¬Y)∧1)∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*(X∧Y)∨((X∧¬Y)∧(Z∨¬Z))∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*(X∧Y)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧¬Z)∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*В одночленi X ∧ Y не вистачає змiнної Z. Введемо змiнну Z:*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*((X∧Y)∧1)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧¬Z)∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*((X∧Y)∧(Z∨¬Z))∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧¬Z)∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*((X∧Y)∧Z)∨((X∧Y)∧¬Z)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧¬Z)∨((Y∧Z)∧X)∨((Y∧Z)∧¬X)=*

*Закон комутативностi кон'юнкцiї (2°)*

*((X∧Y)∧Z)∨((X∧Y)∧¬Z)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧¬Z)∨(X∧(Y∧Z))∨((Y∧Z)∧¬X)=*

*Закон iдемпотентностi диз'юнкцiї (11°)*

*((X∧Y)∧Z)∨((X∧Y)∧¬Z)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧¬Z)∨((Y∧Z)∧¬X) =*

*Закон комутативностi кон'юнкцiї (2°)*

*((X∧Y)∧Z)∨((X∧Y)∧¬Z)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧¬Z)∨(¬X∧(Y∧Z))*

*Дана формула має наступну ДДН-форму:*

*(X∧Y∧Z)∨(X∧Y∧¬Z)∨(X∧¬Y∧Z)∨(X∧¬Y∧¬Z)∨( ¬X ∧Y∧Z)*

**Задача 5.** Рівносильними перетвореннями приведіть формулу до досконалої кон‘юнктивної нормальної форми:

(X∨Y)∧Z

*Розв’язування.*

*Диз’юнктивний одночлен X ∨ Y не є досконалим вiд трьох змiнних X,Y i Z, так як до нього не входить змiнна Z. Введення змiнної Z робиться наступним чином:*

*(X∨Y)∧Z =*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*(X∨Y∨0)∨Z =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(X∨Y∨(Z∨¬Z))∨Z =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∨(Y∨Z)∨(Y∨¬Z))∨Z =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨Z =*

*В одночленi Z не вистачає двох змiнних X i Y. Введемо спочатку змiнну X:*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨0) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X∨¬X) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X)∨(Z∨¬X) =*

*В одночленi Z ∨ X не вистачає змiнної Y. Введемо змiнну Y:*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X∨0)∨(Z∨¬X) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X∨Y∨¬Y)∨(Z∨¬X) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨(X∨Y)∨(X∨¬Y))∨(Z∨¬X) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X∨Y)∧(Z∨X∨¬Y)∧(Z∨¬X) =*

*В одночленi Z ∨ ¬X не вистачає змiнної Y. Введемо змiнну Y:*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї (14°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X∨Y)∨(Z∨X∨¬Y)∨(Z∨¬X∨0) =*

*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X∨Y)∨(Z∨X∨¬Y)∨(Z∨¬X∨Y∨¬Y) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(Z∨X∨Y)∨(Z∨X∨¬Y)∨(Z∨(¬X∨Y)∨(¬X∨¬Y)) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(X∨Y∨Z)∨(X∨¬Y∨Z)∨(¬X∨Y∨Z)∨(¬X∨¬Y∨Z) =*

*Закон iдемпотентностi кон'юнкцiї (12°)*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(X∨¬Y∨Z)∨(¬X∨Y∨Z)∨(¬X∨¬Y∨Z)*

*Дана формула має наступну ДКН-форму:*

*(X∨Y∨Z)∨(X∨Y∨¬Z)∨(X∨¬Y∨Z)∨(¬X∨Y∨Z)∨(¬X∨¬Y∨Z)*

**Задача 6.** Використовуючи ДДН-форму, знайдіть формулу, що приймає значення 1 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

F(0,1,0)=F(1,0,1)= F(1,1,1)=1

*Розв’язування.*

*Вiзьмемо першу умову F(0,1,0)=1*. *Оскiльки кон’юнктивний одночлен X∧Y∧Z приймає значення 1 тодi i тiльки тодi, коли X =1, Y=1, Z=1, то кон’юнкцiя ¬X∧Y∧¬Z приймає значення 1 тодi i тiльки тодi, коли ¬X=1, Y=1, ¬Z=1, тому X =0, Y=1, Z=0.*

*Першiй умовi задовольняє лише кон’юнктивний одночлен ¬X∧Y∧¬Z, другiй X∧¬Y∧Z, третiй X∧Y∧Z. Тодi формула*

*F(X, Y, Z) = (¬X∧Y∧¬Z) ∨ (X∧¬Y∧Z) ∨ (X∧Y∧Z) приймає значення 1, тодi i тiльки тодi, коли ¬X∧Y∧¬Z приймає значення 1, або X∧¬Y∧Z приймає значення 1, або X∧Y∧Z приймає значення 1,тобто якщо i тiльки якщо (X, Y, Z) = (0,1,0) або (X, Y, Z) = (1,0,1), або (X, Y, Z) = (1,1,1).*

*Тодi, F(X, Y, Z) – знайдена формула.*

**Задача 7.** Використовуючи ДКН-форму, знайдіть формулу, що приймає значення 0 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

F(0,1,1)=F(0,0,0)= F(0,1,0)=0

*Розв’язування.*

*Вiзьмемo першу умову F(0,1,1)=0*. *Оскiльки диз’юнктивний одночлен X∨Y∨Z приймає значення 0 тодi i тiльки тодi, коли X=0, Y=0, Z=0, то диз’юнкцiя X∨¬Y∨¬Z приймає значення 0 тодi i тiльки тодi, коли X=0, ¬Y=0, ¬Z=0 тому X=0, Y=1, Z=1.*

*Першiй умовi задовольняє лише диз’юнктивний одночлен X∨¬Y∨¬Z, другiй X∨Y∨Z, третiй X∨¬Y∨Z. Тодi формула*

*F(X, Y, Z) = (X∨¬Y∨¬Z) ∧ (X∨Y∨Z) ∧ (X∨¬Y∨Z) приймає значення 0, тодi i тiльки тодi, коли X∨¬Y∨¬Z приймає значення 0, або X∨Y∨Z приймає значення 0, або X∨¬Y∨Z приймає значення 0, тобто якщо i тiльки якщо (X, Y, Z) = (0,1,1), або (X, Y, Z) = (0,0,0), або (X, Y, Z) = (0,1,0).*

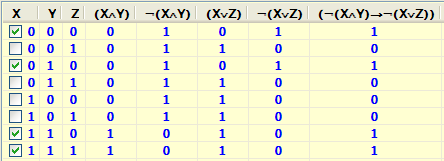
*Тодi, F(X, Y, Z) – знайдена формула.*

**Задача 8.** Для даної формули алгебри висловлень знайдіть ДДН-форму за допомогою її таблиці істинності:

¬(X∧Y)→¬(X∨Z)

*Розв’язування.*

*Складемо таблицю iстинностi даної формули:*

**

*Вибираючи набори значень змiнних, на яких формула приймає значення 1, так як це робили в задачi 6, записуємо досконалу диз’юнктивну нормальну форму для даної формули:*

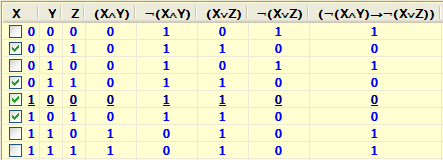
*¬(X∧Y)→¬(X∨Z) ≡ (¬X∧¬Y∧¬Z) ∨ (¬X∧Y∧¬Z) ∨ (X∧Y∧¬Z) ∨ (X∧Y∧Z).*

**Задача 9.** Для даної формули алгебри висловлень знайдіть ДКН-форму за допомогою її таблиці істинності:

¬(X∧Y)→¬(X∨Z)

*Розв’язування.*

*Складемо таблицю iстинностi даної формули:*

**

*Вибираючи набори значень змiнних, на яких формула приймає значення 0, так як це робили в задачi 7, записуємо досконалу кон’юнктивну нормальну форму для даної формули:*

*¬(X∧Y)→¬(X∨Y) ≡ (X∨Y∨¬Z) ∧ (X∨¬Y∨¬Z) ∧ (¬X∨Y∨Z) ∧ (¬X∨Y∨¬Z).*

## Задачі для самостійного розв’язування

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Варіант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| 3.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3.2 |  |  |  |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  |  |  |  |  |
| 3.3 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |  |  |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3.4 | 10 | 11 |  |  |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 3.5 |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |  |  |  |  |  |
| 3.6 | 6 | 7 | 8 |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 3.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

**3.1.** Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до ДНФ:

1. ¬(X∨Z)∧(X→Y)
2. (X↔Y)∧¬(Z→T)
3. (X∨(Y∧¬Z))∧(X∨Z)
4. ((X→Y)→(Z→¬X))→(¬Y→¬Z)
5. (X→(Y→Z))→((X→¬Z)→(X→¬Y))

**3.2.** Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до КНФ:

1. ¬(X∨Z)∧(X→Y)
2. (X↔Y) ∧¬(Z→T)
3. (X∨(Y∧¬Z))∧(X∨Z)
4. ((X→Y)→(Z→¬X))→ (¬Y→¬Z)
5. (X→(Y→Z)) →((X→¬Z) →(X→¬Y))

**3.3.** Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до ДДНФ:

1. (¬X∨Z)∧(Y∨Z)
2. (X∧Y)∨(Y∧Z)
3. X∨(Y∧Z)
4. (X∧Y)∨(Z∧T)
5. ((X∧¬Y)∨Z)∧(¬X∨Z)
6. ((X∨Y)∧(X∨Z))∨(¬Y∧(Z∨¬Y))
7. X∨Y∨Z
8. (X∨Y∨Z)∧(X∨T)∧(Z∨T)
9. (X∧¬Y)∨(¬X∧Y)∨(¬X∧Z)∨(X∧¬Z)∨(Y∧¬Z)∨(¬Y∧Z)
10. ¬X∨(X∧Y)∨(Y∧Z)∨(Z∧T)
11. X∨Y∨Z∨S∨T

**3.4.** Рівносильними перетвореннями приведіть кожну з наступних формул до ДКНФ:

1. (¬X∧Z)∨(Y∧Z)
2. (X∨Y)∧Z
3. (¬X∨Y)∧(X∨Z)
4. (¬X∧Y)∨(Z∧T)
5. (X∧Y∧Z)∨T
6. X∧Y∧Z
7. (X∧Y)∨(Y∧Z)∨(Z∧T)
8. X∨Y∨(¬Z∧T)
9. (X∧Y)∨Z
10. X∧Y∧Z∧T
11. (X∨¬Y)∧(¬X∨Y∨Z)∧¬Z

**3.5.** Використовуючи ДДНФ, знайдіть формулу, що приймає значення 1 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

1. F(0,0)=F(1,1)=1
2. F(1,0)=1
3. F(0,1,0)=F(1,0,1)= F(1,1,1)=1
4. F(0,1,1)=F(1,1,0)=1
5. F(1,0,0)=F(0,1,0)= F(0,0,1)=1
6. F(0,1,1)=F(1,0,1)= F(1,1,0)= F(1,1,1)=1
7. F(0,0,0)=F(0,1,0)= F(1,1,1)=1
8. F(0,1,0,1)=F(1,0,1,0)= F(1,0,0,0)= F(1,1,1,0)= F(1,1,1,1)=1

**3.6.** Використовуючи ДКНФ, знайдіть формулу, що приймає значення 0 на наступних наборах значень змінних, і тільки на них:

1. F(0,1)=F(1,1)=0
2. F(0,1)=0
3. F(0,1,1)=0
4. F(1,0,0)=F(1,0,1)=0
5. F(0,1,1)=F(0,0,0)= F(0,1,0)=0
6. F(1,1,1)=F(0,0,1)= F(1,1,0)= F(1,0,0)=0
7. F(0,0,0)=F(0,1,0)= F(1,1,1)=0
8. F(1,1,0,1)=F(0,0,1,0)= F(1,0,1,0)= F(0,0,1,1)= F(0,0,0,0)=0
   1. Знайдіть ДДНФ, ДКНФ для функції від трьох змінних якщо вектор значень має наступний вигляд, спростити її:
9. F=(0000 1111);
10. F=(1100 1100);
11. F=(1000 1001);
12. F=(0101 0101);
13. F=(0100 0101);
14. F=(1011 1101);
15. F=(0010 0100);
16. F=(0001 1101);
17. F=(0000 0111);
18. F=(0011 1111);
19. F=(1001 1110);
20. F=(0111 0001);
21. F=(0100 0011);
22. F=(0001 1101);
23. F=(1000 0001).

3.8. Знайдіть ДДНФ, ДКНФ для функції від чотирьох змінних якщо вектор значень має наступний вигляд, спростити її:

1. F=(0000 0000 0000 1111);
2. F=(0000 0000 1111 0000);
3. F=(0000 1111 0000 0000);
4. F=(1111 0000 0000 0000);
5. F=(1100 1100 1100 1100 );
6. F=(0101 0101 0101 0101);
7. F=(0110 0110 0110 0110);
8. F=(1001 1001 1001 1001 );
9. F=(1111 1110 1100 1000 );
10. F=(1000 1111 1110 1100 );
11. F=(1100 1111 1110 1000 );
12. F=(1110 1100 1111 1000 );
13. F=( 0000 0011 0110 1100);
14. F=(0111 1000 0110 1001);
15. F=(1000 1001 1011 1111).

# **Лабораторна робота 5.**

Тема: Булеві функції. Застосування булевих функцій до аналізу і синтезу релейно-контактних схем.

**Мета:** Сформувати навички і вміння використовувати булеві функції в теорії релейно-контактних схем. Вивчити методи застосування булевих функцій до аналізу і синтезу релейно-контактних схем.

**План**

* **Застосування булевих функції в теорії релейно-контактних схем.**
* **Аналіз релейно-контактних схем.**
* **Синтез релейно-контактних схем.**

**Короткі теоретичні відомості**

**Застосування булевих функцій до аналізу і синтезу релейно-контактних схем**

Під релейно-контактною схемою ми розуміємо пристрій з провідників і двохпозиційних контактів, через який полюси джерела струму зв‘язані з деяким споживачем. Контакти можуть бути замикаючими або розмикаючими. Кожний контакт підключений до деякого реле (перемикача). Коли реле спрацьовує (знаходиться під струмом), всі підключені до нього замикаючі контакти замкнуті, а розмикаючи контакти розімкнуті; в противному випадку навпаки. Кожному реле ставиться в відповідність своя булева змінна Х, яка приймає значення 1, якщо реле спрацьовує, і 0 в противному випадку.

Всі замикаючі контакти, підключені до реле Х, позначають тим же самим символом, розмикаючи – символом ****Х. Наприклад, умова, за якої проходе струм через схему, зображену на рис.1, може бути представлена наступною пропозиційною формою: 

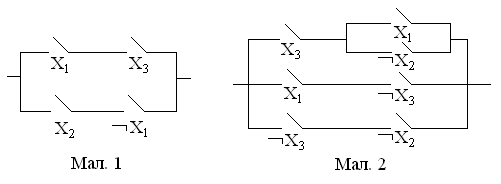
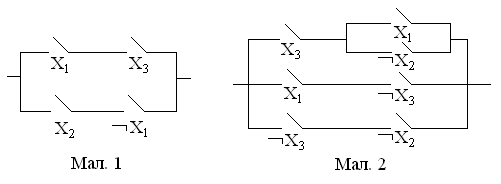
 

Рис.1. Рис.2.

Всій схемі також ставиться в відповідність булева змінна *f*, яка приймає значення 1, якщо схема проводить струм, і 0 в противному випадку. Змінна *f*, яка відповідає схемі, являється булевою функцією від змінних *X1, X2, …, Xn* відповідних реле. Така функція називається *функцією провідності схеми*, а її таблиця – *умовами роботи схеми*. Наприклад, функція провідності схеми, яка зображена на рис. 2, задається пропозиційною формою:

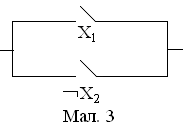


Дві релейно-контактні схеми називаються *рівносильними*, якщо одна з них проводить струм тоді і тільки тоді, коли друга схема проводить струм, тобто якщо обидві ці схеми мають однакові функції провідності.

Так як 



 то схема, зображена на рис.2, буде рівносильна схемі, яка зображена на рис.3, функція провідності якої задається пропозиційною формою 

Рис.3.

З двох рівносильних схем більш простою вважається та, яка містить менше число контактів. Релейно-контактна схема на рис.3 є більш простою, ніж схема на рис.2. Тому виникає важлива задача: серед рівносильних пропозиційних форм, а значить і пропозиційних формул, знайти більш просту.

*Примітка*. У теорії релейно-контактних схем замість ¬X і X∧Y звичайно пишуть X' та X⋅Y.

**Хід заняття**

**Функціонально повні і неповні системи операцій алгебри висловлень**

**Задача 1.** Доведіть повноту наступних систем булевих функцій:

*1) {¬,∨},*

*2) {¬, ∧},*

*3) {¬,→},*

*4) {∧,⊕,1},*

*5) {→,0},*

*6) {⎪},*

*7) {↓}.*

*Розв’язування.*

*1) {¬,∨}*

*Оскільки система {¬,∧,∨} – функціонально повна, то досить показати, що кон‘юнкцію можна виразити формулою алгебри висловлень, яка не містить інших символів операцій, крім “¬”, “∨”****.*** *Останній факт встановлюється рівносильності A∧B≡¬(¬A∨¬B), яку дістаємо з рівносильності*  *(9°)* *¬(A∧**B)**≡¬A∨¬B*  *(закон де Моргана для кон‘юнкції) наступним чином:*

*¬(A∧B)≡¬A∨¬B, ¬¬(A∧B)≡¬(¬A∨¬B), A∧B≡¬(¬A∨¬B).*

**Задача 2.** Доведіть, що наступні системи булевих функцій являються функціонально неповними, тобто в кожному випадку вкажіть функцію, яка не може бути виражена через функції даної системи.

*1) {∧,∨,→},*

*2) {¬},*

*3) {¬,↔}.*

*Розв’язування.*

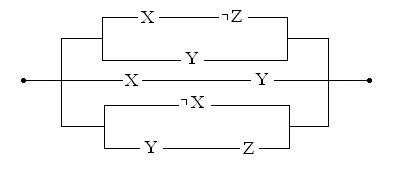
*3) {¬,↔}*

*Через заперечення і еквіваленцію можна виразити тільки булеві функції, стовпчик значень яких має, як у зазначених операціях, однакову кількість нулів і одиниць, а, наприклад, булева функція, що представлена формулою А→В, такої властивості не має, отже, вона не може бути виражена через функції даної системи.*

**Застосування булевих функції в теорії релейно-контактних схем**

**Аналіз релейно-контактних схем**

**Задача 3.** За даною релейно-контактною схемою знайдіть її функцію провідності і умови роботи:



*Розв’язування.*

*Схема складається з трьох паралельних гілок. Перша гілка у свою чергу складається із двох паралельних гілок, у одній із яких послідовно з’єднані два контакти Х і ¬Z, а у другої є лише один контакт Y. Тому перша із трьох паралельних гілок має наступну функцію провідності: X∧¬Z∨Y.*

*Друга паралельна гілка схеми складається з двох послідовно з’єднаних контактів Х і Y і тому має наступну функцію провідності: X∧Y.*

*Третя паралельна гілка схеми складається з двох паралельних гілок, у одній з яких єдиний контакт ¬Х, а в другій послідовно з’єднані контакти Y і Z. Тому функція провідності третьої гілки схеми є ¬Х∨Y∧Z.*

*Отже, так як дана схема складається з трьох паралельно з’єднаних гілок, функції провідності яких ми знайшли, то для знаходження функції провідності всієї схеми потрібно побудувати диз’юнкцію знайдених функцій провідності:*

*f(X,Z,Y)=(X∧¬Z∨ Y)∨* *X∧Y∨(¬Х∨ Y∧Z).*

*Умови роботи даної релейно-контактної схеми представлені в наступній таблиці:*

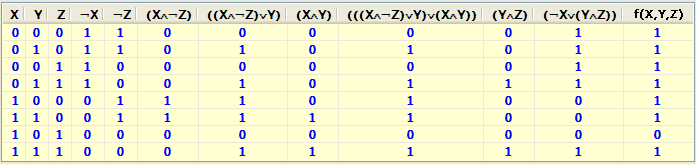
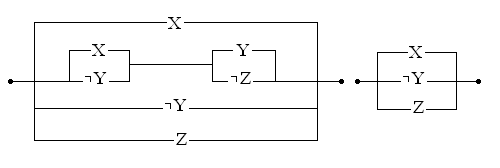
****

Рис. 2.

**Задача 4.** Перевірити рівносильність наступних релейно-контактних схем:



*Розв’язування.*

*Спочатку складемо функцію провідності першої з двох даних схем:*

*f(X,Z,Y)=X∨((X∨¬Y)∧(Y∨ Z))∨¬Y∨ Z*

*Тепер перетворимо її наступним чином:*

*X∨((X∨¬Y)∧(Y∨Z))∨¬Y∨Z =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*X∨(X∨¬Y∨¬Y)∧(Y∨Z∨¬Y)∨Z =*

*Закон iдемпотентностi диз'юнкцiї (11°)*

*X∨(X∨¬Y)∧(Y∨Z∨¬Y)∨Z =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*X∨(X∨¬Y)∧(Y∨¬Y∨Z)∨Z =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*X∨(X∨¬Y)∧(1∨Z)∨Z =*

*Закон одиницi вiдносно диз'юнкцiї (17°)*

*X∨(X∨¬Y)∧(1)∨Z =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*X∨X∨¬Y∨Z =*

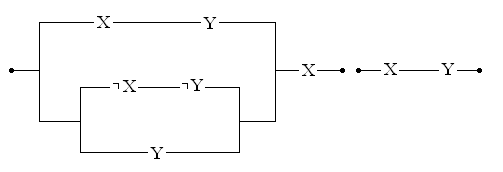
*Закон iдемпотентностi диз'юнкцiї (11°)*

*X∨¬Y∨Z*

*f(X,Z,Y)= X∨¬Y∨Z*

*Зрозуміло, що отримана функція (функція, звичайно, залишилася такою самою, а змінилася лише пропозиційна форма) є функцією провідності другої з двох даних схем. Отже, дані релейно-контактні схеми рівносильні (еквівалентні).*

**Задача 5.**  Спростіть наступну релейно-контактну схему:



*Розв’язування.*

*Складемо функцію провідності даної схеми:*

*f(X,Z,Y)= (X∧Y∨(¬X∧¬Y∨Y))∧X*

*Тепер перетворимо її наступним чином:*

*(X∧Y∨(¬X∧¬Y∨Y))∧X =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*(X∧Y∨(¬X∨Y)∧(¬Y∨Y))∧X =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*(X∧Y∨(¬X∨Y)∧(1))∧X =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*(X∧Y∨¬X∨Y)∧X =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї(8°)*

*((X∨¬X)∧(Y∨¬X)∨Y)∧X =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*((1)∧(Y∨¬X)∨Y)∧X =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*(Y∨¬X∨Y)∧X =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*(Y∨Y∨¬X)∧X =*

*Закон iдемпотентностi диз'юнкцiї (11°)*

*(Y∨¬X)∧X =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*Y∧X∨¬X∧X =*

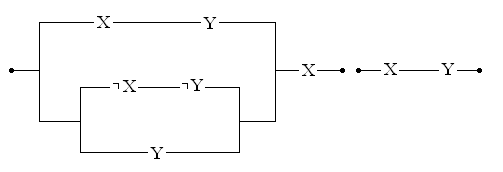
*Вираження нуля через кон'юнкцiю та заперечення (15°)*

*Y∧X∨0 =*

*Закон нуля вiдносно диз'юнкцiї(14°)*

*Y∧X*

*f(X,Z,Y)= X∧Y*

*Функція f(X,Z,Y)= X∧Y є рівносильною до вихідної і являється більш простою. Відповідна релейно-контактна схема має вигляд:* 

**Синтез релейно-контактних схем**

**Задача 6.** Побудуйте найбільш просту релейно-контактну схему функція провідності якої задається наступною пропозиційною формою: ((X→Y)→Z)∨(Y→X)∧Z

*Розв’язування.*

*Виразимо спочатку дану функцію через функції* ****,****,*****, причому так, щоб знак* **** *стояв лише перед змінними:*

*((X→Y)→Z)∨(Y→X)∧Z =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*(¬X∨Y→Z)∨(Y→X)∧Z =*

*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*¬(¬X∨Y) ∨Z∨(Y→X)∧Z =*

*Закон де Моргана для диз'юнкцiї (10°)*

*¬¬X∧¬Y∨Z∨(Y→X)∧Z =*

*Закон подвiйного заперечення (1°)*

*X∧¬Y∨Z∨(Y→X)∧Z =*

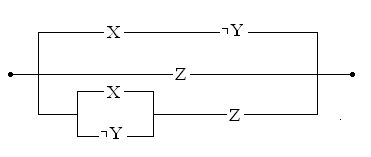
*Вираження iмплiкацiї через диз'юнкцiю та заперечення (21°)*

*X∧¬Y∨Z∨(¬Y∨X)∧Z =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*X∧¬ Y∨ Z∨ ( X∨¬Y)∧ Z*

***Вiдповiдна релейно-контактна схема має вигляд:***



**Задача 7.** Побудуйте найбільш просту релейно-контактну схему з заданими умовами роботи:

f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=1

*Розв’язування.*

*Для знаходження пропозиційної форми для функції f необхідно скористатися ДДН-формою.*

*Видiляємо тi набори значень змiнних, для яких формула приймає значення 1. Вони будуть такими:*

*f(0,0,0)=f(0,0,1)=f(1,0,0)=f(1,0,1)=1*

*Виписуємо ДДНФ, яка задовольняє цим умовам:*

*f(X,Y,Z)=(¬X∧¬Y∧¬Z)∨(¬X∧¬Y∧Z)∨(X∧¬Y∧¬Z)∨(X∧¬Y∧Z)*

*Спрощуємо її за допомогою рiвносильних перетворень:*

*(¬X∧¬Y∧¬Z)∨(¬X∧¬Y∧Z)∨(X∧¬Y∧¬Z)∨(X∧¬Y∧Z) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*((¬X∧¬Y)∧(¬Z∨Z))∨(X∧¬Y∧¬Z)∨(X∧¬Y∧Z) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*((¬X∧¬Y)∧(1))∨(X∧¬Y∧¬Z)∨(X∧¬Y∧Z) =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*(¬X∧¬Y)∨(X∧¬Y∧¬Z)∨(X∧¬Y∧Z) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*(¬X∧¬Y)∨((X∧¬Y)∧(¬Z∨Z)) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*(¬X∧¬Y)∨((X∧¬Y)∧(1)) =(¬X∧¬Y)∨(X∧¬Y) =((¬X∨X)∧¬Y) =(1∧¬Y) =¬Y*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї(7°)*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

***f(X,Y,Z)= ¬Y. Вiдповiдна релейно-контактна схема має вигляд: ***

**Задача 8.** Двері відкриваються, якщо натиснуто не менш двох кнопок із трьох. Побудувати по можливості найбільш просту схему, через яку струм проходив би тоді і тільки тоді, коли не менш двох кнопок натиснуто.

*Розв’язування.*

*Функція провідності такої схеми є функція більшості від трьох змінних. Знайдемо пропозиційну формулу від трьох змінних, яка завжди приймає те саме значення, що і більшість її аргументів.*

*Для знаходження пропозиційної форми для функції f необхідно скористатися ДДН-формою. Видiляємо тi набори значень змiнних, для яких формула приймає значення 1. Вони будуть такими:*

*f(0,1,1)= f(1,0,1)= f(1,1,0)= f(1,1,1)=1*

*Виписуємо ДДНФ, яка задовольняє таким умовам:*

*f(X,Y,Z)= (¬X∧Y∧Z)∨ (X∧¬Y∧Z)∨ (X∧Y∧¬Z)∨ (X∧Y∧Z)*

*Спрощуємо її за допомогою рiвносильних перетворень:*

*(¬X∧Y∧Z)∨(X∧Y∧Z)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧Y)∧¬Z) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї(7°)*

*((¬X∨X)∧Y∧Z)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧Y)∧¬Z) =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*((1∧Y)∧Z)∨((X∧¬Y)∧Z)∨((X∧Y)∧¬Z) =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї(13°)*

*(Y∧Z)∨(X∧¬Y∧Z)∨(X∧Y∧¬Z) =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*((Y∨X∧¬Y)∧Z)∨(X∧Y∧¬Z) =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiївiдносно кон'юнкцiї(8°)*

*(Y∨X)∧(Y∨¬Y)∧Z∨X∧Y∧¬Z =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*(Y∨X)∧1∧Z∨X∧Y∧¬Z =*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*(Y∨X)∧Z∨X∧Y∧¬Z =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*Y∧Z∨X∧Z∨X∧Y∧¬Z =*

*Закон комутативностi диз'юнкцiї (3°)*

*X∧Z∨Y∧Z∨X∧Y∧¬Z =*

*Закон комутативностi кон'юнкцiї (2°)*

*X∧Z∨Y∧Z∨Y∧X∧¬Z =*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*X∧Z∨(Z∨X∧¬Z)∧Y =*

*Закон дистрибутивностi диз'юнкцiї вiдносно кон'юнкцiї (8°)*

*X∧Z∨(Z∨X)∧(Z∨¬Z)∧Y = X∧Z∨(Z∨X)∧1∧Y =*

*Вираження одиницi через диз'юнкцiю та заперечення (18°)*

*Закон одиницi вiдносно кон'юнкцiї (13°)*

*X∧Z∨(Z∨X)∧Y = X∧Z∨Z∧Y∨X∧Y = X∧Y∨Y∧Z∨X∧Z*

*Закон дистрибутивностi кон'юнкцiї вiдносно диз'юнкцiї (7°)*

*Закон комутативностi кон'юнкцiї (2°)*

***Функція провідності має наступний вигляд: f(X,Y,Z)= XY∨YZ∨XZ.***

**Розвязати завдання за номером варіанта**

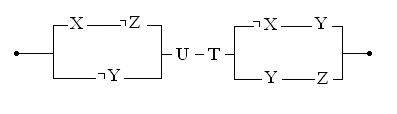
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 5.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 5.3 |  |  |  |  |  |  |  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 5.4 | 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 5.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

## Задачі для самостійного розв’язування

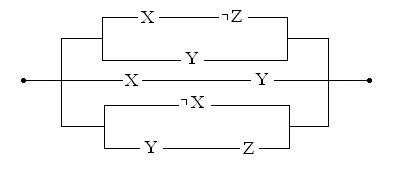
**5.1.** За даною релейно-контактною схемою знайдіть її функцію провідності і умови роботи:

|  |  |
| --- | --- |
| 1) | 6) |
| 2) | 7) |

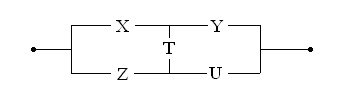
3)



4)

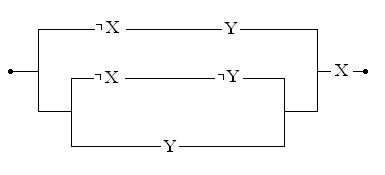


5)

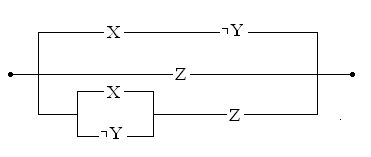


**5.2.** Спростіть наступні релейно-контактні схеми:

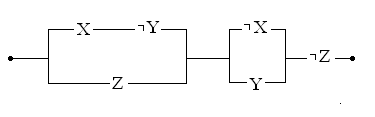
1)



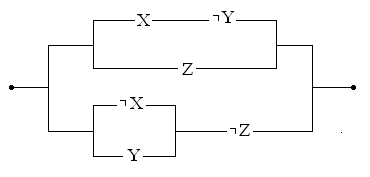
2)



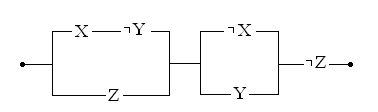
3)



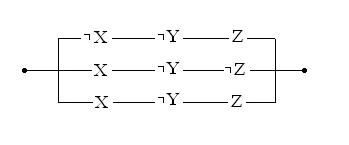
4)



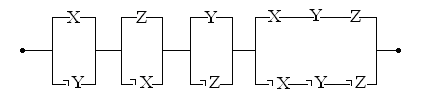
5)



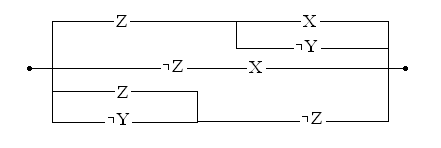
6)



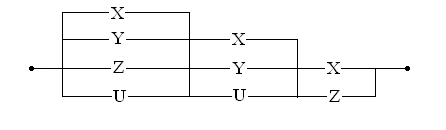
7)



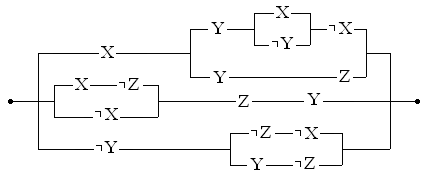
8)



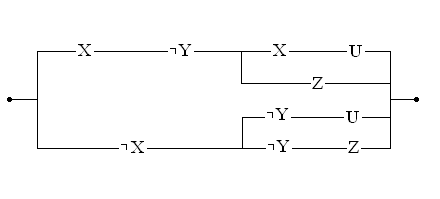
9)



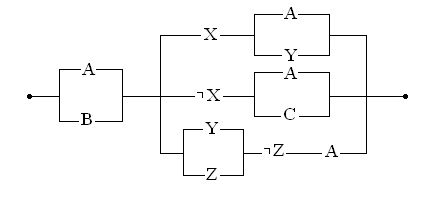
10)



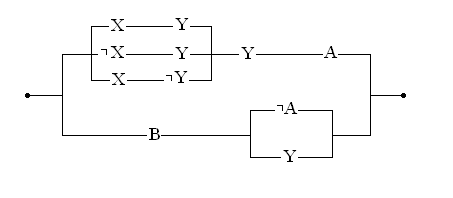
11)



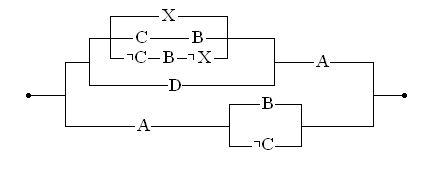
12)



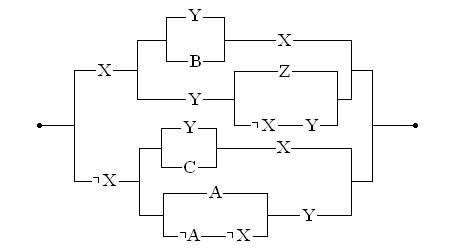
13)



14)

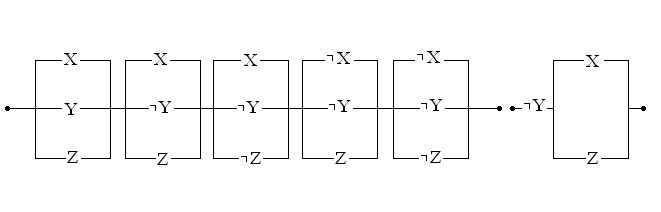


15)

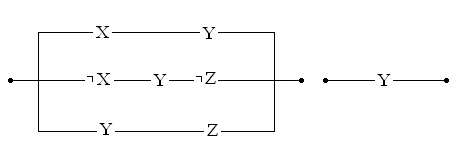


**5.3.** Перевірити рівносильність наступних релейно-контактних схем:

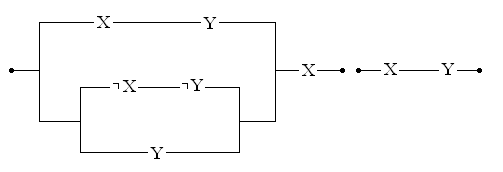
1)



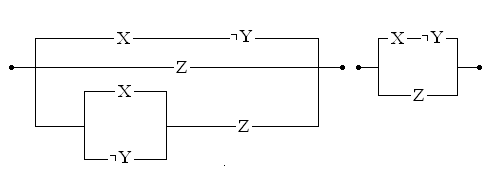
2)



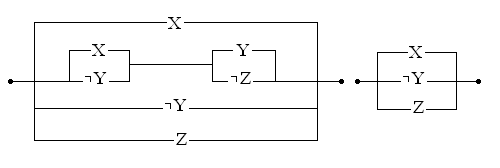
3)



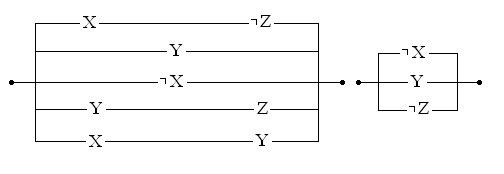
4)



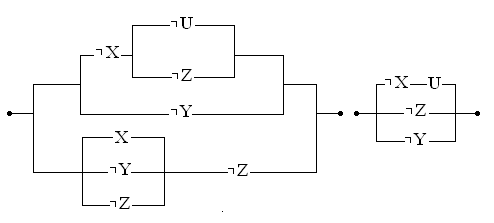
5)



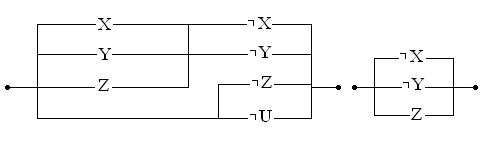
6)



7)



8)



**5.4.** Побудувати найбільш прості релейно-контактні схеми функції провідності яких задаються наступними пропозиційними формами:

1. X∧Y∨Z∧(¬Z∨¬X)
2. (X∨Y)∧¬Z∨¬X∧Z∨Y
3. ((¬X∨Y)∧(Y∧Z∨X))∨ Y ∧Z
4. Y∧(X∨¬Y)∨X∧¬Y∨Z∧(Y∨X)
5. X∧¬Z∨¬X∧Y∧¬Z∨¬X∧(¬Y∧¬Z∨Y)
6. X∧Y∧Z∨X∧Z∨Y∧Z
7. (X→Y)→(¬X∧(Y∨Z))
8. (X→(Y→Z)) →(Y→¬X)
9. (X→(Y→¬Z))∨((X∧Y) ↔Z)
10. ((¬X∨Y)∧(Y∧Z∨X))∨ ¬X ∧Z
11. Y∧(X∨¬Y)∨X∧¬Y∨Z∧(Y∨X)
12. X∧¬Z∨¬X∧Y∧¬Z∨¬X∧(¬Y∧¬Z∨Y)
13. X∧Y∧Z∨X∧Z∨Y∧Z
14. (X→Y)→(¬X∧(Y∨Z))
15. X∧Y→Z∧(¬Z∨¬X)

**5.5**. Побудувати найбільш прості релейно-контактні схеми з заданими умовами роботи:

1. f(0,1,0)=f(1,0,1)=f(1,1,1)=1
2. f(1,0,1)=f(1,1,0)=1
3. f(0,0,1)=f(0,1,1)=f(1,0,1)= f(1,1,1)=1
4. f(1,1,0,1)=f(1,1,1,0)=1
5. f(0,0,1,0)=f(1,0,0,1)=f(1,0,1,1)=1
6. f(1,1,0)=f(0,0,0)=f(1,0,0)=1
7. f(0,0,0)=f(1,0,1)=1
8. f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(0,1,1)= f(1,0,1)=1
9. f(0,0,0)=f(0,1,0)=f(1,0,0)= f(0,1,1)=1
10. f(1,1,1,1)=f(0,1,0,1)=1
11. f(0,0,1,1)=f(0,0,0,0)=f(1,1,0,0)=1
12. f(0,0,1,1)=f(1,1,1,0)=f(0,1,1,0)=1
13. f(0,1,0)=f(0,0,1)=f(1,1,1)=1
14. f(0,0,1)=f(0,1,0)=f(1,0,1)= f(1,1,1)=1
15. f(0,0,1)=f(1,1,0)=f(1,0,1)=1

# **Лабораторна робота 6.**

Тема: Мінімізація булевих функцій. Карти Карно.Метод Квайна.

**Мета:** Закріпити навички та вміння визначати тип формули і її логічне значення. Познайомитися з основними

**План**

* **Мінімізація нормальних форм усюди визначених булевих функцій..**
* **Основні методи мінімізації.**
* **Карти Карно.**

**Короткі теоретичні відомості**

Мінімізація нормальних форм усюди визначених булевих функцій.

Елементарна кон’юнкція Е називається ***імпликантою***булевої функції f, якщо E->f=l.

Імпліканта В називається ***простою***,якщо при видаленні будь-якої букви з неї вона перестає бути імпликантою булевої функції Г.

***Скороченою ДНФ*** називається ДНФ, що складається з усіх простих імплікант даної булевої функції.

***Ядрова імпліканта*** *-* імпліканта, видалення якої з ДНФ деякої булевої функції f приводить до ДНФ, не рівносильної £

***Мінімальна ДНФ***даної функції f - ДНФ, що має найменше число символів перемінних із усіх ДНФ, що задають функцію f.

***Тупикової ДНФ***функції f називається така її ДНФ, що складається з простих импликант, що видалення з неї будь-якої кон’юнкції порушує рівносильність ДНФ даної функції.

***Складністю ДНФ (КНФ)*** називається кількість символів перемінних, використаних у записі формули.

Скорочена ДНФ може бути отримана зі ДДНФ послідовним застосуванням, поки це можливо, формули ***неповного склеювання***

,

а потім - формули ***поглинання***.

***Імплікантна таблиця*** n-арною бф f- прямокутна таблиця двома входами. Строки позначаються простими імплікантами  функції f, а столбчики –двоїчними кортежами  довжиною n, на яких функція ,. Якщо імпліканта  накриває двоїчний кортеж , то на перетині i-тої строки и j-того стовбчика таблиці ставиться \*. Всі інші клітини таблиці залишаються порожніми.

***Метод Петрика***

Кожній простій імпліканті бф f, тобто кожній строці імплікантної таблиці функции f, ставиться у відповідність нова булева змінна.

***Метод Блейка***

Запишемо формулу склеювання . Якщо в довільній ДНФ функції f провести всі можливі склеювання, а також виконати всі елементарні поглинання, в результаті отримаємо скорочену ДНФ функції f.

***Карти Карно***

Будь – яка ЕК змінних накриває в карті Карно деякий прямокутник з сторонами, які є степенями 2.

1. формуємо карту Карно для f.

2. знайти покриття всіх одиниць функції f прямокутниками максимальних розмірів так, щоб кількість таких прямокутників була найменшою.

3. диз’юнкція імплікант, які відповідають прямокутникам покриття, є шуканою мінімальною ДНФ.

**Хід заняття**

**Задача 1.** Для даної функції  *,* заданої векторно, проробити наступне :

1) Записати її ДДНФ і ДКНФ.

2)Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

3) Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові імпліканти.

4) За допомогою матриці Квайна знайти мінімальну ДНФ, указати її складність.

5) Знайти мінімальну ДНФ даної функція за допомогою карт Карно, порівняти отриманий результат із ДНФ, знайденої в п.4*Розв’язування.* 1) Зобразимо таблицю функції f у виді двовимірної таблиці- карти Карно: Знайдемо ДДНФ даної функції:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| zw  xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 1 | I | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 0 |



Знайдений ДКНФ даної функції:



2) Побудуємо скорочену ДНФ зі ДДНФ, використовуючи формули неповного склеювання і поглинання. Для зручності, замість символів перемінних будемо працювати тільки з показниками ступенів перемінних. Наприклад, замість будемо вживати набір 0-1. Тоді ДДНФ функції буде відповідати безліч усіх її одиничних наборів.

Випишемо одиничні набори даної булевої функції в таблицю, розбивши них на групи відповідно до кількості одиничних компонентів у наборах.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 0 0 0 0 + | 0 0 0 - +  0 - 0 0 +  - 0 0 0 + | - 0 0 -  - - 0 0 |
| 0 0 0 1 +  0 1 0 0 +  1 0 0 0 + |
|
| 0 0 – 1 +  0 1 – 0  - 0 0 1 +  1 0 0 - +  - 1 0 0 +  1 – 0 0 + | - 0 - 1  1 – 0 - |
| 0 0 1 1 +  0 1 1 0 +  1 0 0 1 +  1 1 0 0 + |
|
|
|
| 1 0 1 1 +  1 1 0 1 + |
| - 0 1 1 +  1 0 – 1 +  1 – 0 1 +  1 1 0 - + |
|
|
| 1 смуга | 2 смуга | 3 смуга |

Тоді для застосування формули неповного склеювання досить переглянути всілякі пари наборів, що входять у сусідні групи. Результати склеювання наборів з I смуги помістимо в И смузі, а набори, що беруть участь у склеюваннях, позначимо хрестиком. В другій смузі знову застосовуємо, наскільки можливо, операцію склеювання, записуючи результати в III смугу і т.д. Після завершення процедури склеювання всі прості імпліканти потраплять у таблицю і не будуть позначені хрестиком. Позначені ж кон’юнкції поглинуться на етапі застосування формули поглинання.

Скорочена ДНФ даної булевой функції має вигляд:



3) Для одержання зі скороченої ДНФ мінімальної ДНФ зобразимо наступну таблицю - матрицю Квайна: Ядровими імплікантами будуть 1, 4 і 5, тому що для кожної з них найдеться одиничний набір, на якому вона одна приймає значення 1.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № простої імпліканти | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Прості імпліканти  Одиничні набори |  |  |  |  |  |
| 0000 |  | 1 | 1 |  |  |
| 0001 |  | 1 |  | 1 |  |
| 0011 |  |  |  | 1 |  |
| 0100 | 1 |  | 1 |  |  |
| 0110 | 1 |  |  |  |  |
| 1000 |  | 1 | 1 |  | 1 |
| 1001 |  | 1 |  | 1 | 1 |
| 1011 |  |  |  | 1 |  |
| 1100 |  |  | 1 |  | 1 |
| 1101 |  |  |  |  | 1 |

4) Вибираємо найменше число стовпців таких, щоб для кожного рядка з даної таблиці і хоча б однієї одиниці в цьому рядку найшовся б принаймні один стовпець з безлічі обраних стовпців, що містить цю одиницю. Тоді диз'юнкція членів, зіставлених всім обраним стовпцям, є мінімальної ДНФ.

**Задача 2.** Нехай ,, .

Побудувати карту Карно для функції . Знайти мінімальну КНФ, мінімальну ДНФ функції .

*Розв’язування.*

Карта Карно для функції  від трьох змінних має такий вигляд.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| z  xy | 0 | 1 |
| 00 | 0 | 1 |
| 01 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | 0 | 0 |

Ми вважаємо її як би наклеєної на поверхню циліндра, тобто ототожнюємо верхню частину карти Карно з нижньої. При відшуканні мінімальної ДНФ одиниці карти Карно покриваємо прямокутниками виду 2x2 і 1x2, що відповідає імплікантам і xz відповідно, одержуємо мінімальну ДНФ .

Її складність дорівнює 3.

Для перебування мінімальної КНФ покриваємо нулі карти Карно двома прямокутниками розмірами 1x2, що відповідають елементарним диз'юнкціям  і . У результаті одержуємо мінімальну КНФ 

При перебуванні мінімальної ДНФ функції  заповнюємо карту- Карно і покриваємо одиниці карти прямокутниками можливо великих розмірів:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| zw  xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Одержимо мінімальну ДНФ: . Складність МДНФ дорівнює 6.

Відшукаємо мінімальну КНФ . Для цього зробимо покриття нулів Карно: Мінімальна КНФ буде мати вигляд: .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| zw  xy | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | 1 | 0 | 0 | 1 |

## Задачі для самостійного розв’язування лабор 6

**6.1** Для даної функції f*(* x,y,z,w ), заданої векторно, проробити наступне :

1) Записати її ДДНФ і ДКНФ.

2)Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

3) Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові импліканти.

4) За допомогою матриці Квайна знайти мінімальну ДНФ, вказати її складність.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | *f* | № | *f* | № | *f* |
| 1 | 1111 0101 0011 1101 | 6 | 1111 1110 1010 0011 | 11 | 0100 1110 1101 1111 |
| 2 | 1101 1110 1010 1110 | 7 | 1111 0010 0111 1110 | 12 | 1111 1110 0111 1100 |
| 3 | 0111 0001 1111 1101 | 8 | 1100 1110 1111 1011 | 13 | 1000 1011 1111 1111 |
| 4 | 1011 1111 1111 1000 | 9 | 1100 0110 1111 0111 | 14 | 1111 1101 1110 0001 |
| 5 | 1101 0101 1101 1111 | 10 | 1011 1111 1110 0010 | 15 | 1101 0111 1100 1110 |

**6.2** Для даної функції f*(* x,y,z,w ), заданої векторно, проробити наступне :

1) Записати її ДДНФ і ДКНФ.

2)Методом Квайна знайти скорочену ДНФ.

3) Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові импліканти.

4) За допомогою матриці Квайна знайти мінімальну ДНФ, вказати її складність.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | *f* | № | *f* | № | *f* |
| 1 | 1011 1111 0001 1111 | 6 | 1110 0110 1111 1100 | 11 | 1011 1111 1010 1101 |
| 2 | 1110 1100 1111 1001 | 7 | 0111 0111 0101 1011 | 12 | 1001 1101 1010 1111 |
| 3 | 1001 1011 1111 1010 | 8 | 1101 11111110 1010 | 13 | 1110 0110 1111 1100 |
| 4 | 1111 1110 0111 0011 | 9 | 1111 00110111 0111 | 14 | 0011 1011 1010 1111 |
| 5 | 1010 1111 0111 0011 | 10 | 1110 11101010 1101 | 15 | 1111 01101110 1110 |

**6.3** Для завдання 7.1знайти мінімальну ДНФ функції за допомогою карт Карно, порівняти отриманий результат із ДНФ, знайденої методом Квайна.

**6.4** Нехай , , . Побудувати карту Карно для функцій. Знайти мінімальну КНФ, мінімальну ДНФ функцій.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | *f* | *g* | *h* |
| 1 | 1110 0110 | 1101 1110 1010 0110 | 1010 1000 0101 1001 |
| 2 | 0111 0101 | 1111 0111 0111 0001 | 0111 0101 1011 0011 |
| 3 | 1101 1110 | 0111 0101 1011 1011 | 1110 1010 1101 0001 |
| 4 | 1111 0111 | 11101010 1101 0101 | 1111 0111 0111 0101 |
| 5 | 11101010 | 11101010 1101 0011 | 1110 1010 1010 0001 |
| 6 | 1011 1111 | 1011 0001 0001 0101 | 1011 1111 0001 1100 |
| 7 | 1110 1111 | 1110 1111 1001 0001 | 1110 1001 1000 1100 |
| 8 | 1011 1111 | 1011 1010 1110 1000 | 1011 1111 1010 1101 |
| 9 | 1111 1110 | 1111 1000 0101 0011 | 1001 0100 1011 1001 |
| 10 | 1010 0111 | 1110 0110 1111 0101 | 1010 1000 0101 1011 |
| 11 | 1100 1110 | 1011 0001 0001 0101 | 0111 0101 1011 0011 |
| 12 | 1110 0111 | 1110 1111 1001 0001 | 1110 1010 1101 0001 |
| 13 | 11001010 | 1011 1010 1110 1000 | 1111 0111 0111 0101 |
| 14 | 1001 1111 | 0111 0101 1011 1011 | 1110 1001 1000 1100 |
| 15 | 1100 1111 | 11101010 1101 0101 | 1011 1111 1010 1101 |

# **Контрольна робота.**

**Задача 1.** Для булевої функції, заданої векторно, визначити ДДНФ; ДКНФ; мінімізувати функцію ДДНФ (ДКНФ – на вибір); побудувати КРС по мінімальній формі, записати поліном Жегалкіна (перетворення або метод невизначених коефіцієнтів – на вибір).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *№* | *f* | *№* | *f* |
| 1 | 1011 0011 | 11 | 1011 0010 |
| 2 | 0010 0111 | 12 | 0010 0110 |
| 3 | 1010 1011 | 13 | 1010 1010 |
| 4 | 0011 0011 | 14 | 0011 0010 |
| 5 | 0011 0001 | 15 | 0011 0000 |
| 6 | 0110 0011 | 16 | 0110 0010 |
| 7 | 1110 1011 | 17 | 1110 1010 |
| 8 | 1010 0011 | 18 | 1010 0010 |
| 9 | 1110 0001 | 19 | 1110 0100 |
| 10 | 1110 0011 | 20 | 1110 0010 |

**Задача 2.** Перетворити  використовуючи формули розкладу по сукупності змінних , , представити отримані функції від двох змінних формулами g0, g1,…,g15. Спростити функцію методом Карно.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *№* | *f* | *n* | *k* |
| 1 | 0110 1110 1101 1001 | 1 | 2 |
| 2 | 0110 1110 1101 1001 | 1 | 3 |
| 3 | 0110 1110 1101 1001 | 1 | 4 |
| 4 | 0110 1110 1101 1001 | 2 | 3 |
| 5 | 0110 1110 1101 1001 | 2 | 4 |
| 6 | 0110 1110 1101 1001 | 3 | 4 |
| 7 | 1010 1110 0110 0101 | 1 | 2 |
| 8 | 1010 1110 0110 0101 | 1 | 3 |
| 9 | 1010 1110 0110 0101 | 1 | 4 |
| 10 | 1010 1110 0110 0101 | 2 | 3 |
| *№* | *f* | *n* | *k* |
| 11 | 1010 1110 0110 0101 | 2 | 4 |
| 12 | 1010 1110 0110 0101 | 3 | 4 |
| 13 | 1100 0100 0111 0110 | 1 | 2 |
| 14 | 1100 0100 0111 0110 | 1 | 3 |
| 15 | 1011 0001 0001 0101 | 1 | 4 |
| 16 | 1110 1111 1001 0001 | 2 | 3 |
| 17 | 1011 1010 1110 1000 | 2 | 4 |
| 18 | 1111 1000 0101 0011 | 3 | 4 |
| 19 | 1110 0110 1111 0101 | 1 | 2 |
| 20 | 1100 0100 0111 0110 | 1 | 3 |

**Задача 3.** Для даної функції  *f* заданої векторно методом Квайна знайти скорочену ДНФ. Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові імпліканти, знайти мінімальну ДНФ.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | *f* | № | *f* |
| 1 | 1111 0101 0011 1101 | 11 | 0100 1110 1101 1111 |
| 2 | 1101 1110 1010 1110 | 12 | 1111 1110 0111 1100 |
| 3 | 0111 0001 1111 1101 | 13 | 1000 1011 1111 1111 |
| 4 | 1011 1111 1111 1000 | 14 | 1111 1101 1110 0001 |
| 5 | 1101 0101 1101 1111 | 15 | 1101 0111 1100 1110 |
| 6 | 1111 1110 1010 0011 | 16 | 1011 1111 1010 1101 |
| 7 | 1111 0010 0111 1110 | 17 | 1001 1101 1010 1111 |
| 8 | 1100 1110 1111 1011 | 18 | 1110 0110 1111 1100 |
| 9 | 1100 0110 1111 0111 | 19 | 0011 1011 1010 1111 |
| 10 | 1011 1111 1110 0010 | 20 | 1111 0110 1110 1110 |

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи

**№1 Для функції, заданої векторно, визначити ДДНФ, ДКНФ, мінімізувати функцію ДДНФ, побудувати КРС по мінімальній формі, записати поліном Жегалкіна (перетворення або метод невизначених коефіціентів)**

F={1010 0011}

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | f |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

ДДНФ:

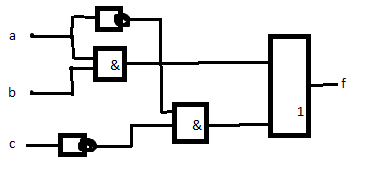
ДКНФ:

Карта Карно:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| bc  a | 00 | 01 | 11 | 10 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Результат:

КРС:



Поліном Жегалкіна:

**№2 Перетворити f(X1,X2,X3,X4) використовуючи формули розкладу по сукупності змінних Xn, Xk, представити отримані функції від двох змінних формулами g0,g1,…,g15. Спростити функцію методом Карно**

F={1010 1110 0110 0101}, n=1, k=3;

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x1 | x2 | x3 | x4 | f |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| N=1, k=3 x2 | x4 | F(0,x2,0,x4) | F(0,x2,1,x4) | F(1,x2,0,x4) | F(1,x2,1,x4) |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

(

Метод Карно:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | |  | |  |
|  |  | 1 | 1 |  |  |
|  | 1 |  | 1 |  |
|  | 1 |  |  | 1 |
| 1 | 1 |  | 1 |  |
|  |  |  | |  |  |

Результат:

**№3 Для булевої функції f, заданої векторно, методом Квайна знайти скорочену ДНФ. Для скороченої ДНФ побудувати матрицю Квайна, указати ядрові імпліканти, знайти мінімальну ДНФ**

F={1100 1110 1111 1011}

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Index |  |  |  |  |  |
| 0 | 0000 |  |  |  |  |
| 1 | 0001 | 0100 | 1000 |  |  |
| 2 | 0101 | 0110 | 1001 | 1010 | 1100 |
| 3 | 1011 | 1110 |  |  |  |
| 4 | 1111 |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0-1 | 000\* | 0\*00 | \*000 |  |  |  |  |  |
| 1-2 | 0\*01 | \*001 | 010\* | 01\*0 | \*100 | 100\* | 10\*0 | 1\*00 |
| 2-3 | \*110 | 10\*1 | 101\* | 11\*0 |  |  |  |  |
| 3-4 | 1\*11 | 111\* |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 0-1-1-2 | 0\*0\* | \*\*00 |  |
| 1-2-2-3 | \*1\*0 | 10\*\* | 1\*\*0 |
| 2-3-3-4 | 1\*1\* |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0000 | 0001 | 0100 | 1000 | 0101 | 0110 | 1001 | 1010 | 1100 | 1011 | 1110 | 1111 |
| 0\*0\* | x | x | x |  | x |  |  |  |  |  |  |  |
| \*\*00 | x |  | x | x |  |  |  |  | x |  |  |  |
| \*1\*0 |  |  | x |  |  | x |  |  | x |  | x |  |
| 10\*\* |  |  |  | x |  |  | x | x |  | x |  |  |
| 1\*\*0 |  |  |  | x |  |  |  | x | x |  | x |  |
| 1\*1\* |  |  |  |  |  |  |  | x |  | x | x | x |

# **Використана література**

1. *Гладкий А.В.* Математическая логика. М.: Российск. гос. гуманит. ун-т, 1998. - 479с.
2. *Гуц А.К.* Математическая логика и теория алгоритмов: Учебное пособие. - Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2003. - 108 с.
3. *Гиндикин С.Г.* Алгебра логики в задачах. М., 1972.
4. *Гохман А. В., Спивак М. А., Розен В. В.* *и др*. Сборник задач по математической логике и алгебре множеств. Саратов, 1969.
5. *Эдельман С. Л.* Математическая логика. Учеб. пособие для ин-тов. М., «Высшая школа», 1975. 176 с. с ил.
6. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов. - Саратов: изд-во СГУ, 1991. - 256 с.
7. *Игошин В.И.* Задачник-практикум по математической логике. М.: Просвещение, 1986. - 160 с.
8. *Касаткин В.Н.* Информация. Алгоритмы. ЭВМ: /Пособие для учителя. М., 1991.
9. *Клини С.К.* Математическая логика. М.: Мир, 1973.
10. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, мате-­  
    матической логике и теории алгоритмов. - М.: Наука, 1975.
11. *Лиман Ф.М.* Математична логіка і теорія алгоритмів. К.,1994.
12. *Мальцев А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1987.
13. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М.: Наука, 1976.
14. *Мощенский В. А.* Лекции по математической логике. Мн., Изд-во БГУ, 1973.
15. *Новиков П.С.* Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.
16. *Роджерс Дж.* Теория алгоритмов и эффективная вычислимость.
17. *Успенский В. А., Верещагин Н. К., Плиско В. Е.* Вводный курс математической логики. - 2-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. -128 с.
18. *Хромой Я.В.* Математична логіка. – К.: Вища школа, 1983.-208 с.
19. *Хромой Я.В.* Збірник вправ і задач з математичної логіки. – К.: Вища школа, 1978.-160 с.
20. *Черч А.* Введение в математическую логику. М.: Мир, 1960.

Кулаковська

Інесса Василівна

Математична логіка

*Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт*

**Випуск № &&&**

Підписано до друку 20.12.2018р.

Формат 60х84 1/16. Папір офсет.

Гарнітура «Times Roman». Друк ризограф.

Ум. друк. арк. 5,0. Зам. №\_\_\_\_\_

Видавець і виготовлювач: ЧНУ ім.Петра Могили.

54003, м. Миколаїв, вул.68 Десантників,10.

Тел.: 8 (0512) 50-03-32, 8 (0512) 76-55-81, e-mail: [vrector@kma.mk.ua](mailto:vrector@kma.mk.ua).

Свідоцтво субєкта видавничої справи ДК № 3460 від 10.04.2009р.